

1. Drgania harmoniczne. Energia w ruchu drgającym

Drgania harmoniczne – to proces powtarzający się w czasie (okresie). To znaczy, że ciało okresowo wykonuje drgania wokół położenia równowagi.

Dodatkowo warunkiem zachodzenia drgań harmonicznycch jest działanie siły proporcjonalnej do wychylenia z położenia równowagi, tą zależność opisuje wzór:

$$F = -k\Delta l$$

Gdzie l – zmiana długość sprężyny

k – siła sprężystości

Równanie drgań harmonicznycch (drgania własne):

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Ruch harmoniczny opisany jest równaniem (jednocześnie jest rozwinięciem równana (1)):

$$x = f(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

A – amplituda

ω_0 – częstość drgań własnych

φ – faza początkowa

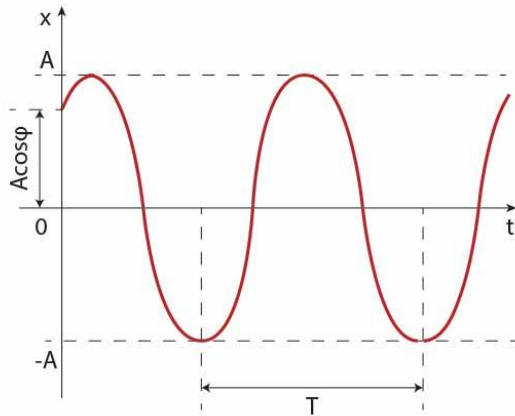
$(\omega_0 t + \varphi)$ - faza

$$\text{wzór na } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ gdzie } f = \frac{1}{T}$$

f – częstoćliwość, czyli odwrotność okresu

T – okres drgań

Wykres ruchu harmonicznego:



Całkowitą energię mechaniczną drgań harmoniczych można zapisać w postaci:

$$E_M = E_K + U = \frac{kA^2}{2}$$

Wzór na energię potencjalną U wynika z tego, że $U = 0$, gdy ciało znajduje się w położeniu równowagi

$$U = \frac{kx^2}{2} + const.$$

Wzór na energię kinetyczną E_K

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

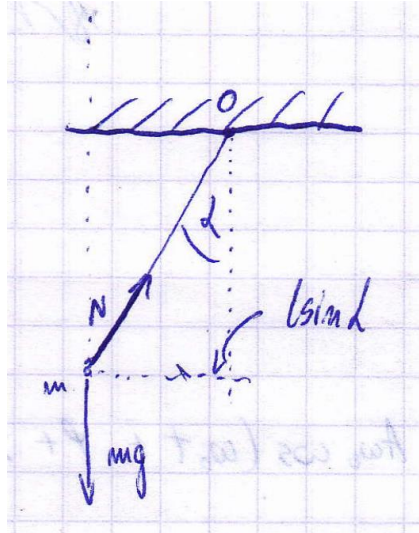
2. **Wahadło matematyczne** - to punkt materialny o masie m zawieszony na nieważkiej nierozciągliwej nici wykonujący ruch obrotowy wokół punktu zawieszenia nici.
Drgania tego wahadła mogą być uznane za harmoniczne tylko jeżeli są bardzo małe

Równanie opisujące ruch wahadła matematycznego (nie jest równaniem harmonicznym chyba, że $\sin\alpha \approx \alpha$)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\alpha = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$



3. Drgania tłumione. Logarytmiczny dekrement tłumienia. Dobroć.

Drgania tłumione – drgania poddane działaniu sił oporu (sił tarcia) w wyniku których energia mechaniczna układu maleje w czasie.

$$ma = -kx - rv$$

Te drgania można opisać za pomocą równania różniczkowego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

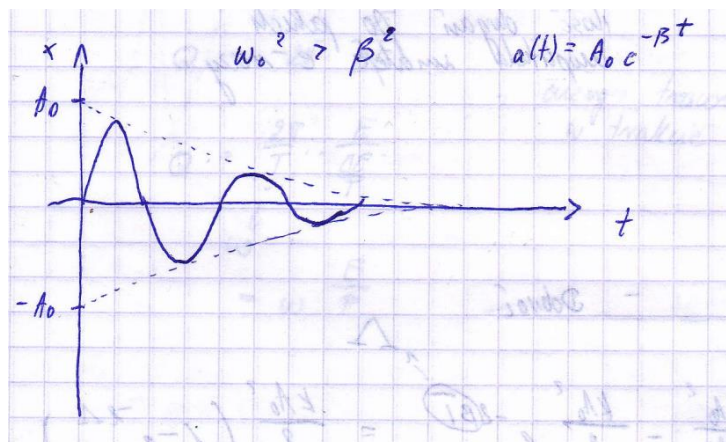
Gdzie β – współczynnik tłumienia

ω_0 – częstość drgań własnych

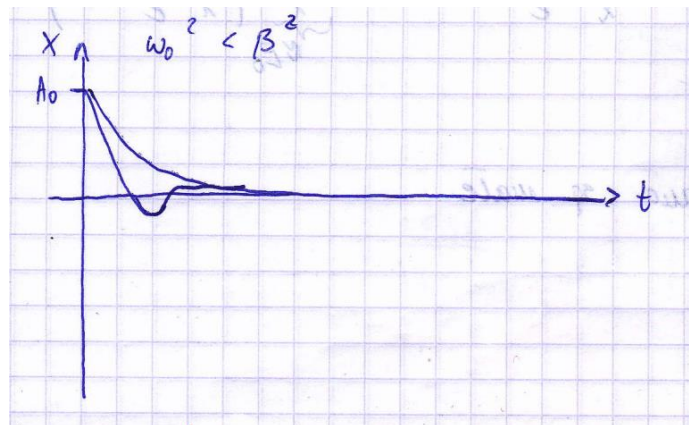
ω – częstość drgań tłumionych

Rozwiązaniem równania jest funkcja położenia ciała w zależności od czasu, pod warunkiem, że $\omega_0^2 > \beta^2$, czyli występuje niezbyt duże tłumienie:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$



Z kolei dla $\omega_0^2 < \beta^2$:



Analogicznie do powyższego:

$$v = -A_0\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)\omega$$

$$\omega_0^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

Jako, że całkowita Em układu jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy, to w energia drgań tłumionych maleje w czasie z zależnością:

$$E = \frac{ka^2}{2} = \frac{kA^2}{2} e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}$$

Dobroć - jest równa stosunkowi energii zgromadzonej w układzie do energii traconej w czasie jednego okresu.

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda}$$

Q – dobroć

Λ – logarytmiczny dekrement tłumienia

Logarytmiczny dekrement tłumienia - logarytm naturalny stosunku amplitud odległych w czasie o okres

$$\Lambda = \ln \left[\frac{a(t)}{a(t+T)} \right] = \beta T$$

$$\Lambda = \frac{1}{N_e}$$

$N_e = \frac{\tau}{T}$ - N_e czyli liczba po wykonaniu których amplituda maleje

e razy

$$\tau = \frac{1}{\beta} \text{ - czas relaksacji}$$

4. Drgania wymuszone. Rezonans.

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos(\Omega t)$$

siła harmoniczna o częstotliwości Ω
Układ drgający na który działa zewnętrzna siła harmoniczna wymuszająca drgania $F = F_0 \cos(\Omega t)$ jest opisany równaniem:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t)$$

Którego rozwiązaniem tego równania jest zależność położenia ciała od czasu:

$$x = A \cos(\Omega t - \phi)$$

Rezonans

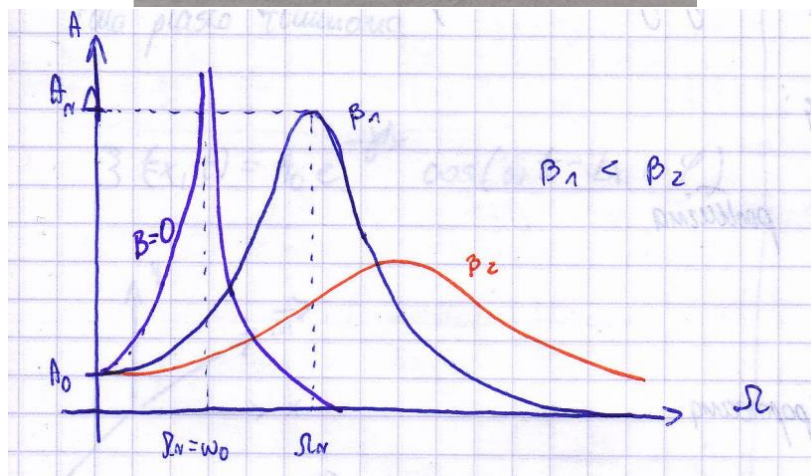
– zjawisko osiągania przez amplitudę drgań wymuszonych wartości maksymalnej przy pewnej częstotliwości siły wymuszającej

Częstotliwość rezonansowa opisana jest równaniem:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Z kolei amplituda drgań rezonansowych jest tym większa im mniejsze jest tłumienie drgań w układzie


$$A_r = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$



Przy bardzo małym tłumieniu $B \rightarrow 0$

Wzrost tłumienia powoduje wypłaszczenie wykresu

5. Drgania w obwodzie RLC


$$U_R + U_C = \varepsilon_0 \cos(\omega t) - L \frac{di}{dt}$$

\downarrow \downarrow
 iR $\frac{q}{C}$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$
$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\beta} \frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{L}}_{f_0} \cos(\omega t)$$

W obwodzie RLC drgania wykonuje ładunek na kondensatorze

6. Pojęcie fali. Klasyfikacja fal

Fala - jest to zaburzenie rozchodzące się w ośrodku i przenoszące energię.

Klasyfikacja fal w zależności od:

a) kierunku zaburzenia:

- fale poprzeczne – kierunek prostopadły do kierunku propagacji
- fale podłużne – kierunek zaburzenia i propagacji pokrywa się

b) kształtu powierzchni falowej – płaskie, kuliste cylindryczne itp.

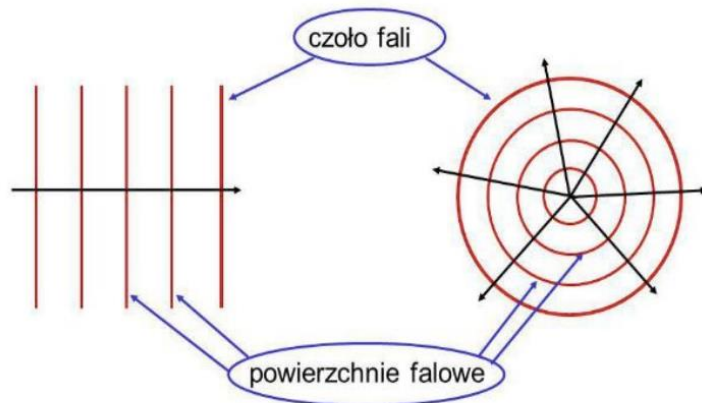
c) Fale sprężyste i elektromagnetyczne

Pojęcia związane z falami:

Czoło fali - geometryczne miejsce punktów, do których dochodzi zaburzenie w chwili t (pierwsza powierzchnia falowa)

Powierzchnia falowa - geometryczne miejsce punktów drgających w zgodnej fazie

Fala płaska i kulista



7. Równanie fali płaskiej. Prędkość fazowa

Równanie fali płaskiej nietłumionej:

$$\xi(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Gdzie A_0 – amplituda fali

$(\omega t - kx + \varphi)$ - faza fali

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – okresowość w przestrzeni opisana długością

fali $\lambda = vT$

k – liczba falowa

λ – długość fali

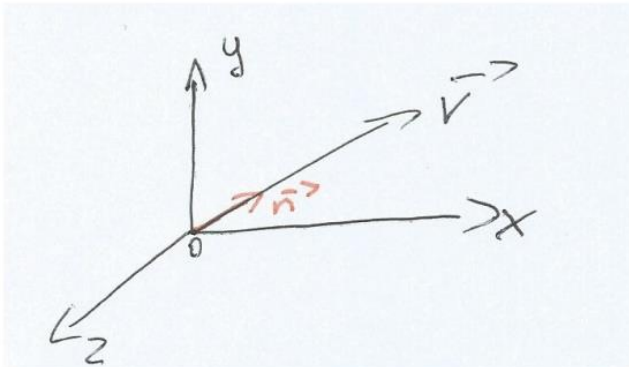
Długość fali - odległość punktów drgających w zgodnej fazie $\lambda = vT$

Fala monochromatyczna jest to fala o niezmienną się częstotliwości i stałej amplitudzie.

Fala płaska tłumiona W rzeczywistości pobudzone do drgań cząsteczki ośrodka tracą energię na skutek tarcia lepkiego, dzięki czemu energia fali się rozprasza i fala zanika w pewnej odległości od źródła.

Amplituda: $a(x) = A_0 e^{-\gamma x}$

$$\xi(x, t) = A_0 e^{-\gamma x} \cos(\Omega t - kx + \varphi)$$



$k \cdot \vec{n} = k$ - wektor falowy

\vec{n} - wektor jednostkowy pokazujący kierunek rozchodzenia się fali

Prędkość fazowa – prędkość przesuwania się płaszczyzn falowych, czyli prędkość propagacji fazy fali

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

8. Równanie falowe. Prędkość fal sprężystych a własności ośrodka.

Równanie falowe jest rozwiązaniem równania różniczkowego równania falowego. Dowolna funkcja ξ spełniająca to równanie opisuje falę rozchodzącą się w ośrodku z prędkością fazową v

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

∇ - operator Nabla (do opisu gradientów)

Δ - operator Laplace'a

Prędkość podłużnej fali sprężystej jest związana z właściwościami ośrodka wzorem:

$$v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}$$

E_Y - moduł Younga (wielkość określająca sprężystość materiału)

ρ - gęstość

W zależności od rodzaju fali należy zmienić występujący w nim moduł Younga E_Y na moduł sprężystości odpowiadający deformacji, która towarzyszy propagacji konkretnej fali:

- a) dla fal poprzecznych, związanych z deformacją ścinania będzie to moduł ścinania G (czyli współczynniki określające sprężystość materiału dla fali)
- b) dla fal akustycznych (podłużne) deformacja polega na zmianie objętości, a moduł sprężystości będzie równy k_p (k - kappa, p - ciśnienie)

Prędkość dźwięku w powietrzu:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

Dla powietrza w warunkach normalnych ta prędkość wynosi 331,5 m/s

9. Energia fali sprężystej. Natężenie fali.

Energia kinetyczna przy elemencie o masie $\rho\Delta V$:

$$E_k = \frac{\rho\Delta V}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

Energia potencjalna:

$$U = \frac{E_Y \Delta V}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

W obu przypadkach zakładając, że deformacja i prędkość cząsteczek w obu przypadkach w całej objętości jednakowe.

Objętościowa gęstość energii fali sprężystej wyrażona jest jako całkowita energia mechaniczna podzielona przez objętość i dana jest poniższym równaniem, który jest poprawny w przypadku ogólnym:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx + \varphi)$$

Strumień energii - przez powierzchnię ΔS - ilość energii dE , którą przenosi fala przez powierzchnię ΔS w czasie dt

$$\phi_s = \frac{dE}{dt}$$

Gęstość strumienia energii – wektorowa wielkość która umożliwia określenie przepływu energii w różnych punktach.

Co do wartości równa strumieniowi energii, a kierunek wektora gęstości energii pokrywa się z kierunkiem transportu energii

$$|\vec{j}| = j = \frac{dE}{\Delta S_{\perp} dt}$$

Dodatkowo jeżeli kierunek prędkości fazowej pokrywa się z kierunkiem transportu energii, to otrzymujemy wektor

$$\vec{j} = w\vec{v}.$$

Korzystając z powyższego wektora gęstości możemy wyprowadzić zależność:

$$\Phi_S = \int_S \vec{j} \circ d\vec{S}.$$

Natężenie fali - średnia energia przenoszona przez falę w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku propagacji fali.

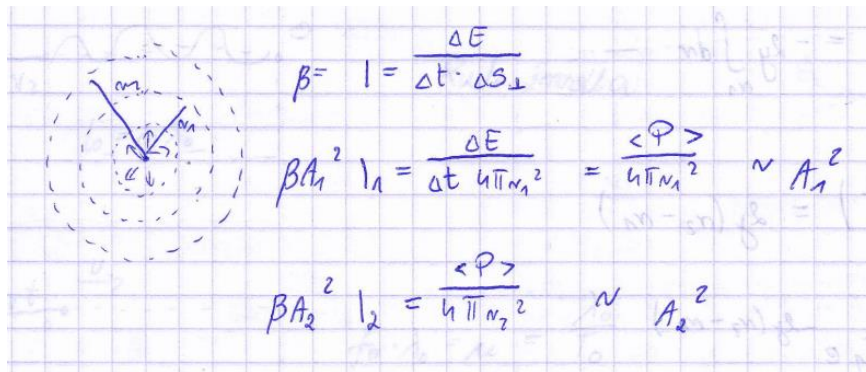
Natężenie fali jest równe średniej gęstości strumienia energii co przedstawia poniższa zależność:

$$I = \langle j \rangle$$

Wzór na natężenie:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

10. Równanie fali kulistej.



Natężenie maleje z kwadratem odległości od źródła

Równanie fali kulistej nietłumionej

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi)$$

Równanie fali kulistej tłumionej

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} e^{-\gamma r} \cos(\omega t - kr + \varphi)$$

Natężenie fali jest równe średniej gęstości strumienia energii

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v$$

Amplituda maleje wraz z oddalaniem od źródła

$$A(r) = \frac{A_0}{r}$$

Gdzie

γ – współczynnik tłumienia fali (współczynnik pochłaniania energii przez ośrodek, w którym się roznosi)

11. Fale akustyczne. Poziom głośności.

Fala akustyczna - fala sprężysta propagująca w powietrzu o częstotliwości w zakresie od 16 Hz do 20.000 Hz.

Wysokość dźwięku - zależy od częstotliwości fali akustycznej.

Barwa dźwięku - zależy od widma akustycznego, które z kolei zależy od częstotliwości wchodzących w skład dźwięku.

Głośność dźwięku - zależy od natężenia fali akustycznej
natężenie progowe (I_0) dla ludzkiego ucha jest równe około 10^{-12} W/m^2

$$LB[dB] = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

I – głośność

f – wysokość

12. Zjawisko Dopplera

Zjawisko Dopplera - polega na zmianie częstotliwości odbieranego przez odbiornik dźwięku względem tego nadawanego przez źródło z powodu ruchu jednego lub obu tych ciał

przypadek 1

źródło jest nieruchome -> fala po n okresach dociera na odległość nvT

$$f' = f_0 \frac{u + v_0}{u}$$

Przypadek 2

Źródło porusza się z prędkością V_z w kierunku odbiornika to odległość między nimi wynosi $n(V - V_z)$

$$f = \frac{u}{u - v_z} f_0$$

Przypadek 3

Źródło i odbiornik poruszają się w kierunku do siebie (częstotliwość wtedy rośnie)

$$f' = f_0 \frac{u + v_0}{u - v_z}$$

! Gdy poruszają się od siebie znaki "+" i "-" zamieniamy ze sobą (częstotliwość maleje) !

f_0 - częstotliwość wysyłanego dźwięku przez źródło
f - częstotliwość dźwięku odbierana przez odbiornik
 v_z - prędkość źródła

v_0 – prędkość odbiornika
 u – prędkość dźwięku w ośrodku

13. Ruchy cieplne molekuł. Ciśnienie gazu na ściankę naczynia.

Ruchy cieplne - to chaotyczne ruchy molekuł zależne od temperatury ciała. Jeżeli układ jest w równowadze (wszystkie parametry gazu są stałe) to ruchy te nie mają wyróżnionego kierunku (ruchy są całkowicie nieuporządkowane, chaotyczne).

Siła z jaką ścianka działa na molekuły, co do wartości, jest równa sile z jaką molekuły działają na ściankę oraz jest uzależniona od zmian pędu tych molekuł i ich zderzeń ze ściankami. Podzielenie tej siły przez powierzchnię ścianki to dostaniemy wzór na ciśnienie wywierane przez gaz na ściankę naczynia:

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle$$

Δp – całkowita zmiana pędu związana ze zderzeniami molekuł
 $\langle \rangle$ - wartość średnia
 n – koncentracja molekuł gazu

Zasada ekwipartycji energii:

$\frac{k\pi}{2}$ – średnia wartość E_k na jeden stopień swobody molekuły

14. Równanie stanu gazu doskonałego

Gaz Doskonały - gaz w którym oddziaływania pomiędzy poszczególnymi molekułami są zaniedbywalnie małe i można je traktować jak punkty materialne

równanie gazu doskonałego

$$\frac{PV}{T} = \text{const.}$$

Dla jednego mola:

$$\frac{PV_0}{T} = R$$

Gdzie V_0 – objętość jednego mola

R - uniwersalna stała gazowa

Powyższe równanie możemy zapisać też w inny sposób jeśli wprowadzimy stałą Boltzmana równą $k = \frac{R}{N}$ gdzie N to liczba molekuł w jednym molu gazu

$$P = nkT$$

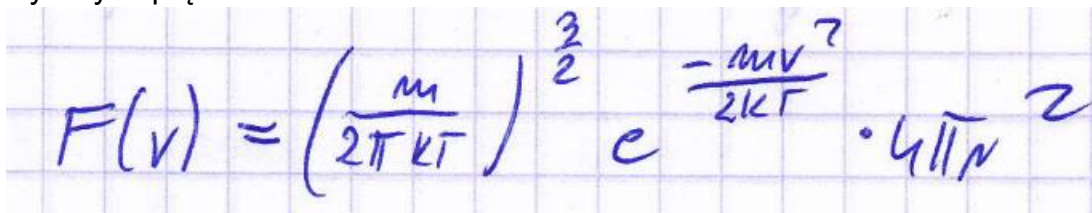
15. Zasada ekwipartycji energii

Zasada ekwipartycji energii:

$\frac{k\pi}{2}$ – średnia wartość E_k na jeden stopień swobody molekuly

16. Rozkład prędkości Maxwella

Rozkład prędkości maxwella to funkcja opisująca rozkład wartości prędkości molekuł w gazie, czyli funkcja pozwalająca obliczyć jaka część molekuł ma prędkości zawarte w pewnym zadanym przedziale. Wraz ze wzrostem temperatury maximum rozkładu Maxwella przesuwa się w kierunku wyższych prędkości.


$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2$$

17.

Wzór barometryczny - wzór opisujący zależność ciśnienia atmosferycznego P od wysokości h . Im wyżej się znajdujemy tym ciśnienie jest mniejsze.

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

P_0 - ciśnienie na 0 wysokości

μ - masa molowa gazu

g - przyspieszenie grawitacyjne

Rozkład Boltzmana – opisuje rozkład molekuł w zależności od ich energii potencjalnej U .

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$$

n_0 - koncentracja molekuł z energią potencjalną 0

18. Zasady termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki:

ciepło dostarczone do układu jest zużywane na przyrost energii wewnętrznej układu i wykonanie przez układ pracy nad ciałami zewnętrznym

$$\delta Q = dU + \delta W$$

δ – wartość ciepła i pracy możemy wyznaczyć w sposób bezwzględny

d – nie można powiedzieć jaką energią wewnętrzną ma np. gaz, można co najwyżej wyznaczyć zmianę

Druga zasada termodynamiki

Nie są możliwe takie procesy, w których w sposób samoistny ciepło przepływałoby od ciała o temperaturze niższej do ciała o temperaturze wyższej

19. Entropia.

Entropia jest funkcją stanu, pozwala na przewidywanie jak będą zachodziły procesy w układzie, czyli pokazuje jak będzie się zachowywał układ, gdy zostawimy go samemu sobie. Jest miarą uporządkowania w układzie

Proces odwracalny – możemy wrócić do stanu poprzedniego bez strat energii

$$dS = \frac{dQ \text{ (ciepło dostarczone do układu)}}{T \text{ (jego temperatura)}}$$

Proces nieodwracalny – część energii nieodwracalnie zamieniła się na energię wewnętrzną układu

$$ds > \frac{dQ}{T}$$

20. Potencjały termodynamiczne

Energia wewnętrzna:

$$U = BT$$

B – stała

Proces adiabatyczny

$$Q = 0 \rightarrow W = -\Delta U$$

Energia swobodna

$$F = U - TS$$

S – entropia

W procesie izotermicznym $W = -\Delta F$

! Zmiana energii swobodnej jest równa pracy w odwracalnym procesie izotermicznym

Entalpia

Zmiana entalpii jest równa ciepłu dostarczonemu do gazu w przemianie izobarycznej

$$\delta Q_p = dH$$

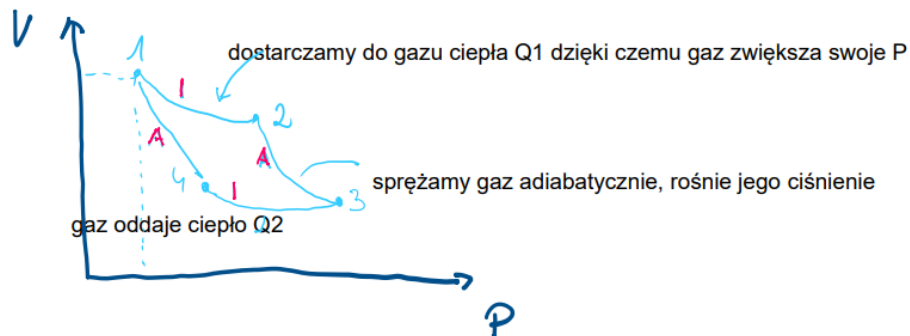
Termodynamiczny potencjał Gibbsa

W przemianie odwracalnej przy stałej temperaturze i ciśnieniu potencjał Gibbsa nie ulega zmianie

$$dG = VdP - sdT$$

21. Cykl Carnota

Odwracalny cykl termodynamiczny składający się z 4 przemian. Dwóch izotermicznych i dwóch adiabatycznych.



$$W = Q_1 - Q_2$$

sprawność tego cyklu (praca przez ciepło pobrane):

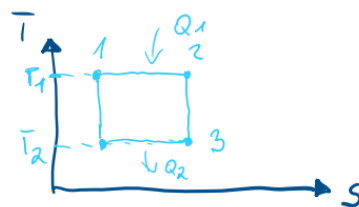
$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Elementarna praca wykonana przez gaz:

$$dW = P \cdot dV$$

$$\text{Praca} : w = \int_{\text{cykl}} P dV$$

Inna forma wykresu cyklu Carnota:



$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$ds = \frac{dQ}{T}$$

$$\text{dla } T = \text{const} \quad \Delta s = \frac{\Delta Q}{T}$$

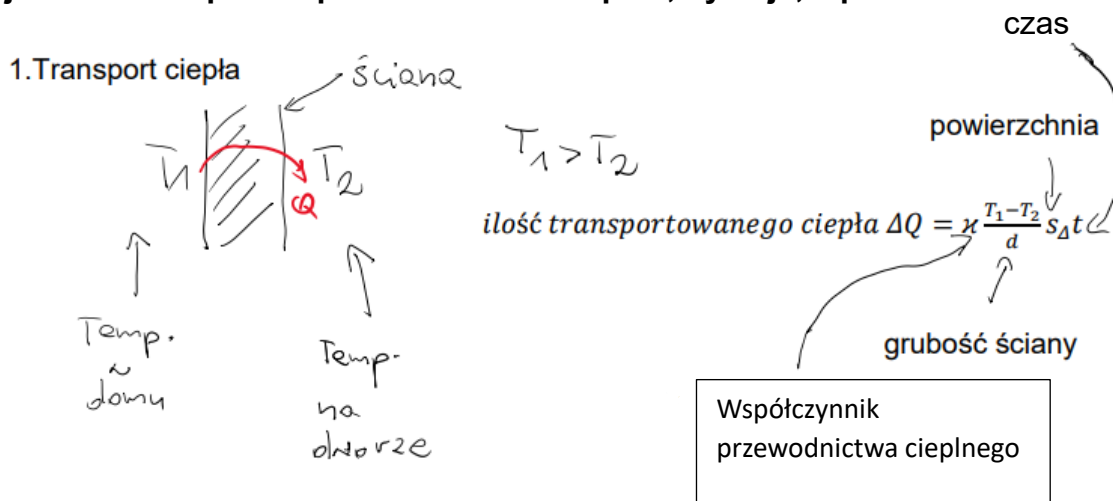
$$\Delta s_{12} = \frac{Q_1}{T_1} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta s_{12} = \frac{Q_1}{T_1} \\ \Delta s_{34} = -\frac{Q_2}{T_2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$$\Delta s_{34} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

W przypadku idealnego silnika termodynamicznego sprawność zależy od temperatury źródła ciepła czyli grzejnika i temperatury chłodnicy.

22. Zjawiska transportu - przewodnictwo ciepłe, dyfuzja, lepkość



Gęstość strumienia ciepła:

$$j_a = \frac{\Delta Q}{S \Delta t} = \kappa \left(\frac{T_1 - T_2}{d} \right) \rightarrow \text{gradient temperatury}$$

$$\vec{j}_a = -\kappa * \text{grad} T - \text{prawo Fouriera}$$

Równanie prawa Fouriera opisuje transport ciepła.
Zjawisko transportu ciepła nosi nazwę przewodnictwa cieplnego.

2. Dyfuzja – czyli zjawisko transportu masy

Gęstość strumienia cząstek:

$$\vec{j}_n = -D \text{grad} n$$

D – współczynnik dyfuzji

Gęstość strumienia masy:

$$\vec{j}_m = -D \text{grad} \rho$$

$$\rho = n m_0$$

3. Lepkość czyli transport pędu

Gęstość strumienia pędu:

$$\vec{j}_p = -n \text{grad} u$$

n – współczynnik lepkości u – prędkość

23. Średnia droga swobodna a współczynniki w równaniach transportu

średnia droga swobodna – średnia droga którą cząsteczki przebywają pomiędzy dwoma kolejnymi zderzeniami:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

d – efektywna średnica cząstek na zderzenie

Chaotyczne ruchy cieplne starają się przywrócić równowagę w układzie

Dyfuzyjny transport – transport spowodowany chaotycznymi ruchami cieplnymi cząstek

Jeżeli $n = \text{const.} \Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{p}$ (średnia droga swobodna jest odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia gazu)

24. Pole elektrostatyczne w próżni i dielektrykach

Natężenie pola elektrycznego definiujemy jako siłę działającą na ładunek próbny q (umieszczony w danym punkcie w przestrzeni) podzieloną przez ten ładunek:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Podstawowe prawo opisujące oddziaływanie ładunków elektrycznych, czyli Prawo Coloumba

Mamy ładunki punktowe (q i Q), które są w odległości R od siebie, to siła z jaką jeden

oddziałuje na drugi da się zapisać: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2}$

Powyższy wzór jest poprawny tylko jeśli ładunki traktujemy jako ładunki punktowe (ładunek punktowy jest to wyidealizowany model, ciało o nieskończenie małych rozmiarach zawierające ładunek elektryczny).

Jeśli ładunki Q i q są oddalone od siebie o wektor R to siłę F musimy zapisać w postaci wektorowej:

Prawo Coloumba zapisane w sposób wektorowy wygląda

$$\text{tak: } \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}$$

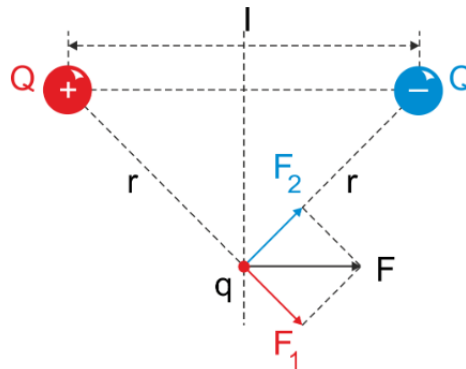
Potencjał pola to energia potencjalna oddziaływań wzajemnych jaką ma ładunek próbny do tego ładunku:

$$V = \frac{U}{q}$$

Siły działające w polu potencjalnym są siłami zachowawczymi, co znaczy, że praca zależy od położenia początkowego i końcowego, czyli praca sił pola na torze zamkniętym jest równa 0, z czego wynika Zasada zachowania energii mechanicznej- jeżeli ciało znajduje się w polu sił potencjalnych, to jego energia mechaniczna pozostaje wartością stałą

Wartość ϵ_r (stałej materiałowej, zwanej względną przenikalnością elektryczną ośrodka) w próżni jest równa 1.

Dipol – układ ładunków punktowych o tych samych wartościach i przeciwnych znakach $q+$ i $q-$ odległych o l .



Korzystając z prawa Coulomba otrzymujemy:

$$F = qk \frac{p}{r^3}$$

Gdzie p to moment dipolowy: $\vec{p} = q\vec{l}$

\vec{l} skierowane od '-' do '+'

Moment siły:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Aby moment \vec{p} obrócić w polu elektrycznym \vec{E} o kąt $d\alpha$ należy wykonać pracę:

$$dW = M d\alpha = pE \sin\alpha d\alpha$$

Praca ta jest równa energii potencjalnej dipola:

$$U = -pE \cos\alpha + \text{const}$$

Jeśli $\text{const.} = 0$ to $U = -\vec{p} \circ \vec{E}$

Dielektryk (izolator) - materiał w którym nie ma swobodnych ładunków Elektrycznych (czyli słabo przewodzi prąd). Atomy dielektryka są złożone z dodatnich jąder i ujemnie naładowanych elektronów. Sumaryczny ładunek dowolnej cząsteczki jest równy zero

25. Polaryzacja dielektryka - jej rodzaje. Wektor indukcji elektrycznej

Polaryzacja dielektryka - indukowanie (uzyskanie wypadkowego momentu dipolowego) pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego.

Charakter zachodzących procesów zależy od tego czy molekuły są polarne czy nie polarne

Molekuła niepolarna - środki ciężkości ładunków pokrywają się. Moment dipolowy równy zero. Molekułami niepolarnymi są molekuły symetryczne.

Molekuła polarna - środki ciężkości są przesunięte względem siebie.

Molekuła jako całość ma pewien moment dipolowy. Są niesymetryczne

Rodzaje polaryzacji:

- polaryzacja elektronowa – polega na przesunięciu środków ciężkości ładunków tworzących molekułę
- polaryzacja orientacji - częściowe uporządkowanie momentów dipolowych
- polaryzacja jonowa – tworzenie jednej dużej kuli

Wektor indukcji elektrycznej (\vec{D}) – zależy tylko od ładunków swobodnych i nie zmienia się przy wypełnieniu dielektrykami. Nie zależy też od ośrodka, w którym wytworzono pole elektryczne, a zależy jedynie od źródeł pola.

Strumień wektora indukcji elektrycznej przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy ładunkowi zamkniętemu wewnątrz tej powierzchni.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Przenikalność elektryczna
W próżni

Pole elektryczne w dielektryku

Polaryzacja elektryczna równa
Gęstości dipolowego momentu elektrycznego

26. Objętościowe i powierzchniowe ładunki związane

Jeżeli dielektryk nie jest spolaryzowany, to objętościowa gęstość ładunków dowolnej jego objętości i powierzchniowa gęstość ładunku na dowolnej jego powierzchni jest równa zero. W wyniku polaryzacji gęstość ładunków powierzchniowych, a w pewnych przypadkach również objętościowa gęstość ładunku stają się różne od zera.

Powierzchniowa gęstość ładunków związanych - określa rozkład ładunków na danej powierzchni dS . Jest równa składowej normalnej wektora polaryzacji na danej powierzchni

$$\sigma' = P \cos \alpha = \vec{P} \circ \vec{n} = P_n$$

n – wektor jednostkowy normalny do powierzchni
 P – wektor polaryzacji

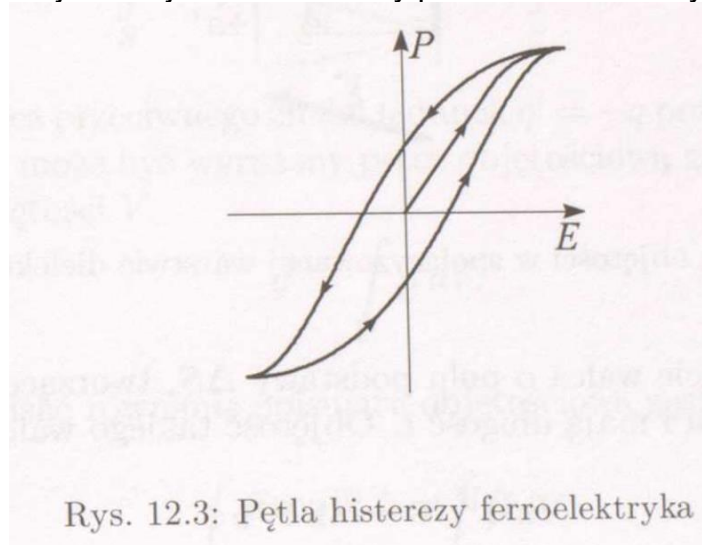
Objęściowa gęstość ładunków związanych - w wyniku polaryzacji w pewnej objętości pojawia się nieskompensowany ładunek związany. Pojawia się wypadkowy ładunek elektryczny w rozpatrywanej objętości

$$\oint_S \vec{P} \circ d\vec{S} = - \int_V \rho' dV$$

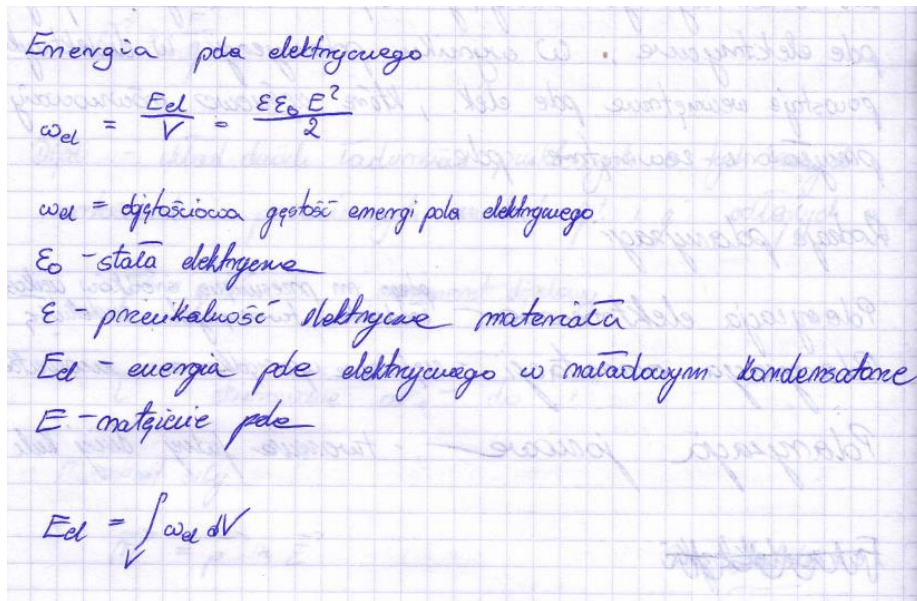
27. Ferroelektryki

Ferroelektryki – grupa materiałów o bardzo dużej podatności elektrycznej, które mogą być spolaryzowane przy braku zewnętrznego pola elektrycznego. Ferroelektryki to kryształy o specyficznej budowie.

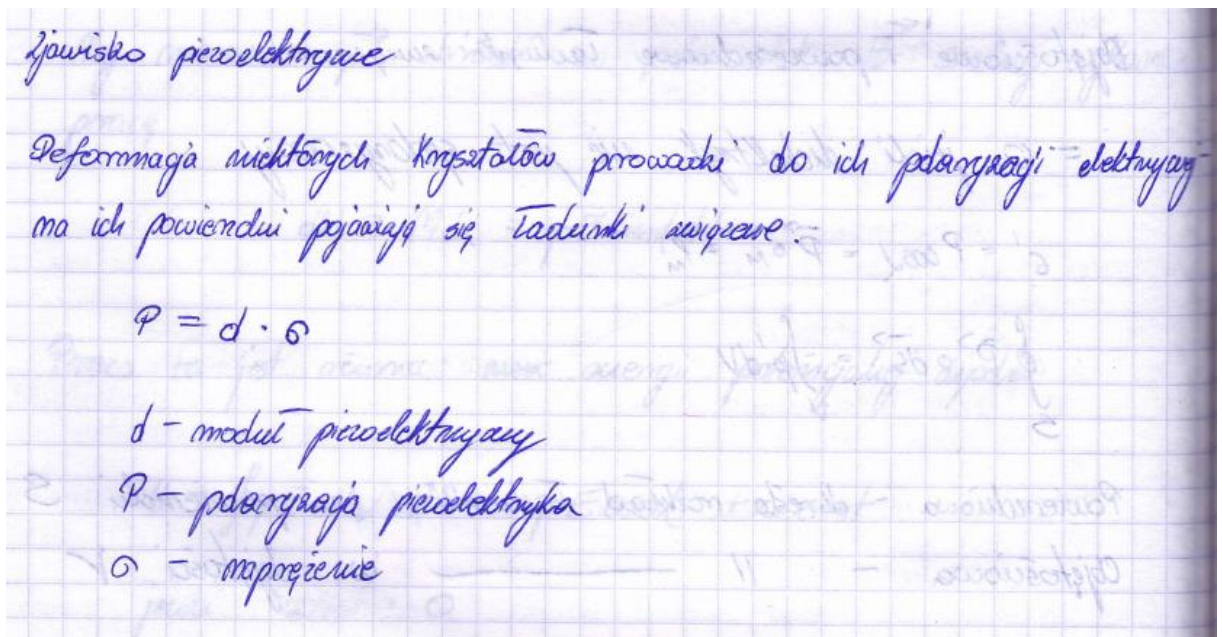
Zależność wektora polaryzacji P i natężeniem pola E jest nieliniowa i niejednoznaczna – jest to zjawisko histerezy przedstawione na rysunku poniżej:



28. Energia pola elektrycznego



29. Zjawisko piezoelektryczne



30. Pole magnetyczne. Prawo Biota-Savarta

Pole magnetyczne - pole sił działających na poruszające się ładunki oraz na ciała

posiadające własny moment magnetyczny (magnesy). Wytwarzają je poruszające się ładunki elektryczne oraz ciała posiadające własny moment magnetyczny (magnesy stałe). W polu działa zasada superpozycji.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$$

\vec{H} - wektor natężenia pola magnetycznego, \vec{B} - wektor indukcji magnetycznej, μ - względna przenikalność magnetyczna ośrodka.

Pole magnetyczne, tak jak ruch, zależy od wyboru punktu odniesienia. Używamy dwóch wielkości opisujących: natężenia i indukcji pola.

Prawo Biota – Savarta

Prawo to jest podstawą do obliczania indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez przewodniki o dowolnym kształcie, w których płynie prąd elektryczny. Wyraża się je wzorem:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 i [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

$d\vec{B}$ - elementarna indukcja wytwarzana przez przewodnik o dł. $d\vec{l}$ przez który płynie prąd i w punkcie wskazywanym przez wektor wodzący \vec{r}

μ_0 - przenikalność magnetyczna w próżni
 μ - przenikalność magnetyczna względna

31. Siła Lorentza. Prawo Ampere'a

Siła Lorentza

Siła działająca na cząstkę naładowaną ze strony pola magnetycznego jest zawsze prostopadła do prędkości i nie wykonuje pracy nad cząstką. Jeżeli oprócz pola magnetycznego w przestrzeni istnieje pole elektryczne to siła działająca na cząstkę jest równa:

$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$

F - siła Lorentza
 q - ładunek
 E - natężenie pola elek.
 v - prędkość ładunku q
 B - indukcja pola magnetycznego

Prawo Ampere'a

Przepływ prądów i zmienne pole elektryczne powodują powstanie wirowego pola magnetycznego

$$d\vec{F} = i [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (13.19)$$

Powyższa zależność, określająca siłę działającą na element długości przewodnika z prądem w polu magnetycznym nosi nazwę prawa Ampere'a.

32. Pole magnetyczne w materii. Dia-, para- i ferromagnetyki

Pole magnetyczne w materii

Cząstki, z których składowana jest materia mogą posiadać własne momenty magnetyczne. Jeżeli nie ma zewnętrznego pola, momenty te są w przypadku większości materiałów ustawione chaotycznie; wypadkowy moment magnetyczny materiału jest równy zero.

Umieszczenie materii w zewnętrznym polu magnetycznym zmienia tę sytuację. Momenty magnetyczne molekuł tworzących ciało oddziałują ze sobą i następuje ich częściowe uporządkowanie.

Pole magnetyczne powoduje również wyindukowanie momentów magnetycznych atomów. Zostaje namagnesowanie. Namagnesowana materia tworzy własne pole magnetyczne \vec{B} , które nakłada się na pole zewnętrzne B_0 .

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_{cm}$$

\vec{p} - moment magnetyczny cząstki zawartej w objętości ΔV

Namagnesowanie materii charakteryzuje wektor namagnesowania \vec{J} równy momentowi magn. jednostki objętości:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

χ - podatność mag. ośrodka
 \vec{H} - wektor materiału pola mag.

Podatność magnetyczna ośrodka i jego względna przenikalność magnetyczna są ze sobą powiązane:

$$\mu = 1 + \chi$$

μ - względna przenikalność χ - podatność magnetyczna

Diamagnetyki

Diamagnetyki - ciała, których atomy nie mają wypadkowego momentu magnetycznego. Ich podatność magnetyczną opisuje wzór

$$\chi = -\mu_0 \frac{e^2}{60m} \sum_{i=1}^Z n_i^2$$

m - masa elektronu

n - promień orbity elektronu

Z - liczba atomowa (liczba elektronów w atomie)

jest ona zawsze ujemna a jej wartość bezwzględna jest dużo mniejsza od jedności między 10^{-3} dla gazów i 10^{-2} dla cieczy, ciał stałych.

Paramagnetyki

Paramagnetyki - ciała, których wypadkowy moment magnetyczny atomów jest różny od zera. Ze względu na pole magnetyczne stara się ustawić momenty magn. poszczególnych atomów zgodnie z kierunkiem pola. Podatność magnetyczną paramagnetyków opisuje wzór:

$$\chi = \frac{\mu_0 n p^2}{3kT}$$

Podatność jest między 10^{-7} dla gazów oraz między 10^{-4} dla cieczy i ciał stałych.

Prawo Curie dla paramagnetyku:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}$$

C - stała

T_C - temperatura Curie (temperatura powyżej której ferromagnetyk traci swoje właściwości i staje się paramagnetykiem)

Ferromagnetyki

Ferrromagnetyki - ciała, których podatność magnetyczna przyjmuje bardzo duże wartości. Dla nich wektor namagnesowania jest stałą funkcją natężenia pola magnetycznego. Wartość tego wektora, który wcześniej nie angażował się w pole magnetyczne, bardzo szybko rośnie i ulega nasyceniu.

33. Energia pola magnetycznego

Energia pola magnetycznego o indukcji B zgromadzona w objętości V jest opisana wzorem:

$$E_{mag} = V \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$$

Po podzieleniu tego wzoru przez objętość solenoidu otrzymujemy wzór na objętościową gęstość pola magnetycznego:

$$w_{mag} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{HB}{2}$$

μ - względna przenikalność magnetyczna ośrodka

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni

B - indukcja magnetyczna

H - natężenie pola elektrycznego

w_{mag} - objętościowa gęstość pola magnetycznego

(wzory są analogiczne do tych na pole elektryczne)

34. Zjawisko indukcji elektromagnetycznej. Prądy wirowe

magnetycznej - Zmiana strumienia indukcji magnetycznej przez powierzchnię ograniczoną zamkniętym przewodem powoduje przepływ prądu elektrycznego w tym przewodniku. Oznacza to, że w przewodniku powstaje siła elektromotoryczna. Jej wartość zależy od prędkości zmian strumienia indukcji magnetycznej przez wspomnianą powierzchnię

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

Φ_B - strumień wektora indukcji magnetycznej (strumień magnetyczny) // duże Φ

\mathcal{E} - siła elektromotoryczna

Prądy wirowe - prądy indukcyjne powstające wewnątrz dużych brył

przewodników, w objętości przewodnika można wyróżnić nieskończenie wiele konturów, w których przy zmianach pola magnetycznego będzie indukować się siła elektromotoryczna powodująca przepływ pola elektrycznego. Przepływ prądu w przewodniku powoduje wydzielanie się ciepła (Ciepło Joule'a - Lenza)

35. Równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego

Jest to zbiór 4 równań opisujących pole elektryczne i magnetyczne:

- Prawo Gaussa dla pola elektrycznego
Strumień indukcji pola przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy ładunkowi zamkniętemu w tej powierzchni
- Źródłem pola elektrycznego są ładunki elektryczne

$$\oint_S \vec{D} \circ d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego
Strumień wektora indukcji magnetycznej przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zeru.
- Pole magnetyczne jest polem bezźródłowym

$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$$

- Zasada indukcji elektromagnetycznej Faradaya
Wybieramy pewien zamknięty kontur Γ . Zmiany strumienia indukcji magnetycznej będą powodowały wyindukowanie w konturze siły elektromotorycznej.
- Zmienne pole magnetyczne powoduje powstanie wirowego pola Elektrycznego

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

- Prawo Ampere'a
Przepływ prądów i zmienne pole elektryczne powodują powstanie wirowego pola elektrycznego

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \circ d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$$

Γ (w całce) - kontur, na którym oparta jest powierzchnia S

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \circ d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_p) dS$$

Ostatnie równanie można zapisać w uproszczonej formie gdzie:

j - gęstość prądów przepływających przez elementarną powierzchnię
 j_p - gęstość prądów przesunięcia

Powyższe równania to równania dla pewnej objętości lub powierzchni w przestrzeni

Możemy też wyprowadzić równania opisujące wybrany punkt w przestrzeni:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \circ \vec{D} = \rho, \\ \vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Równania materiałowe – związki pomiędzy wielkościami w równaniach Maxwella:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}, \end{aligned}$$

σ - przewodność elektryczna

μ - względna przenikalność magnetyczna ośrodka

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni

ϵ_0 - stała elektryczna

ϵ - przenikalność elektryczna materiału

36. Fale elektromagnetyczne. Płaska fala elektromagnetyczna

Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną. Wektory E i H są prostopadłe

Równanie fali elektrycznej

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Równanie fali magnetycznej

$$\nabla^2 \vec{H} = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

!Fale te nie mogą istnieć niezależnie od siebie, są powiązane trzecim i czwartym równaniem Maxwella. Dlatego równania te rozpatrujemy łącznie!

Prędkość fazowa fali elektromagnetycznej:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$$

Prędkość propagacji fali elektromagnetycznej jest zależna od właściwości elektrycznych i magnetycznych ośrodka, w próżni wynosi

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

37. Energia fal elektromagnetycznych. Wektor Poyntinga

objętościowa gęstość energii związanej z falą jest równa sumie gęstości pola elektrycznego i magnetycznego, po przekształceniach i skorzystaniu

z zależności $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$ otrzymamy wzór:

$$w = \frac{\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E\sqrt{\mu\mu_0}H}{2} + \frac{\sqrt{\mu\mu_0}H\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E}{2} = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}EH = \frac{EH}{v}$$

Wzór na gęstość strumienia energii otrzymujemy z podstawienia wzoru na objętościową gęstość energii do poniższego wzoru:

$$j = wv = EH$$

Wektor Poyntinga to wektor gęstości strumienia energii w falach elektromagnetycznych oznaczany jako \vec{S}

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Natężenie fali elektromagnetycznej to średnia wartość wektora Poyntinga

38. Oddziaływanie fal elektromagnetycznych z materią. Dyspersja. Prędkość grupowa

Pole elektryczne i magnetyczne powodują polaryzację elektryczną i magnesowanie ośrodka.

Polaryzacja elektronowa – przemieszczenie elektronów (ruch wywołany przez siłę sprężystości), przy jednoczesnym braku ruchu źródła. Równanie ruchu tych elektronów:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

gdzie $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Równanie jest szczególnym przypadkiem równania opisującego drgania wymuszone, w których nie ma tłumienia.

Prędkość fazowa fali elektromagnetycznej w ośrodku:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Dla większości materiałów $\mu \approx 1$ i możemy zapisać

$$v \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$$

Prędkość rozchodzenia się fali świetlnej tak jak każdej innej fali elektromagnetycznej, jest określona właściwościami elektrycznymi i magnetycznymi ośrodka, ale w praktyce przy opisie rozchodzenia się światła nie korzystamy z przenikalności elektrycznej, lecz wprowadzamy nową wielkość - współczynnik załamania światła i jest on równy stosunkowi prędkości światła w próżni do prędkości światła w danym ośrodku

$$n = \sqrt{\epsilon} = \frac{c}{v} \quad \begin{array}{l} \text{prędkość światła w próżni} \\ \text{prędkość - " - w ośrodku} \end{array}$$

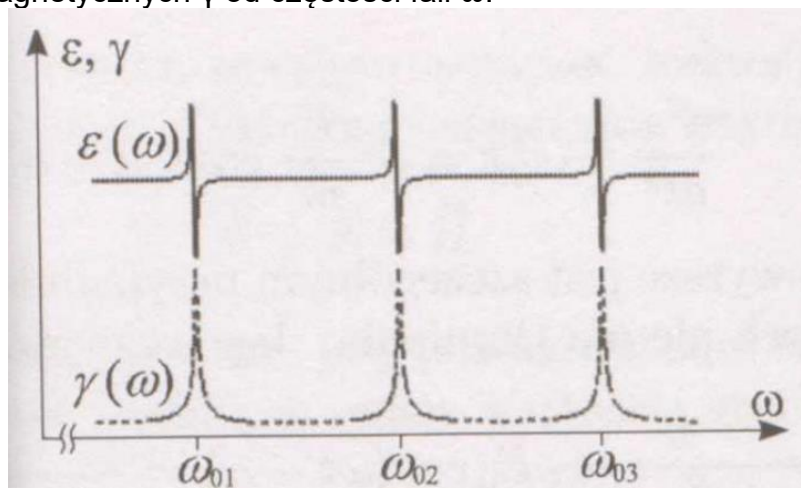
Dyspersja – zależność prędkości fali od częstotliwości

$$v = f(\omega)$$

Dyspersja normalna – rośnie częstość, a prędkość spada

Dyspersja anormalna – rośnie częstość i prędkość

Zależność względnej przenikalności elektrycznej ϵ i współczynnika pochłaniania fali elektromagnetycznych γ od częstości fali ω :



39. Światło

Światło to fale elektromagnetyczne, które odbiera nasze oko. Są to fale z zakresu $(0,39 \div 0,75) \times 10^{15}$ Hz

Prędkość rozchodzenia się fali świetlnej tak jak każdej innej fali elektromagnetycznej, jest określona właściwościami elektrycznymi i magnetycznymi ośrodka, ale w praktyce przy opisie rozchodzenia się światła nie korzystamy z przenikalności elektrycznej, lecz wprowadzamy nową wielkość - współczynnik załamania światła

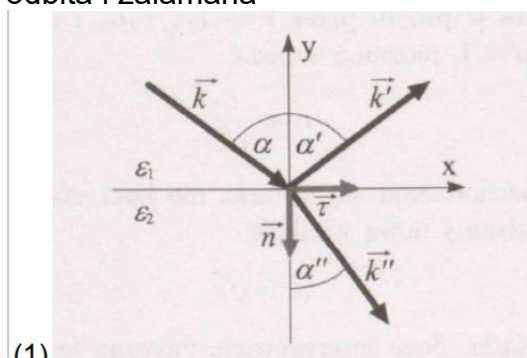
$$n = \sqrt{\epsilon} = \frac{c}{v}$$

gdzie c – prędkość światła w próżni
 v – prędkość światła w ośrodku

Dodatkowo współczynnik załamania światła n zależy od częstotliwości

Fala świetlna na granicy dwóch ośrodków

W ogólnym przypadku płaska fala elektromagnetyczna która pada na granicę dwóch dielektryków o przenikalności elektrycznej odpowiednio część fali odbije się od granicy ośrodków, a część przejdzie tę granicę. Powstanie fala odbita i załamana



(1)

ϵ_1, ϵ_2 - przenikalności elektryczne materiału

Γ - kontur

Aby powyższa definicja była poprawna muszą zostać spełnione warunki:

- Składowe styczne natężenia pola elektrycznego na granicy dwóch dielektryków muszą być sobie równe
Aby ten warunek był spełniony w dowolnej chwili czasu musi zachodzić równość $\omega = \omega' = \omega''$ oznacza to, że częstość fali padającej, odbitej i załamanej jest taka sama.
- Prawo opisujące zachowanie się fali na granicach ośrodka kąt odbicia jest równy kątowi padania. Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest dla danych ośrodków stały i określony stosunkiem prędkości dal w tych ośrodkach

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \frac{v_1}{v_2}$$

- względny współczynnik załamania światła ośrodka drugiego względem pierwszego

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

n_{21} - względny współczynnik załamania światła ośrodka drugiego względem pierwszego.

Zjawisko załamania fali może zajść tylko wtedy, gdy kąt padania jest mniejszy od pewnej wartości granicznej:

$$\alpha_{gr} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

Całkowite odbicie wewnętrzne – jeżeli kąt padania jest większy od kąta granicznego to światło nie przechodzi do drugiego ośrodka i w całości odbija się o granicy

Związki pomiędzy natężeniem pola elektrycznego fali padającej, odbitej i załamanej (5), czynnik $\frac{2n_1}{n_1+n_2}$ jest zawsze dodatni. Wynika z tego że wektory \vec{E} i \vec{E}' są w dowolnej chwili tak samo zwrócone - drgania w fali padającej i załamanej na granicy rozdziału zachodzą zawsze w zgodnej fazie. W pierwszym równaniu jak to co stoi przy E będzie ujemne to mają przeciwne zwroty, jeśli dodatnie to takie same.

$$\vec{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E},$$

$$\vec{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \vec{E}.$$

40. Optyka geometryczna. Prawa optyki geometrycznej. Zasada Fermata

Optyka geometryczna - dział optyki oparty na geometrycznym opisie rozchodzenia się światła. (Poniższe prawa możemy stosować, tylko gdy długość fali światła jest pomijalnie mała w porównaniu z rozmiarami obiektów tworzących układ)

a. Prawo prostoliniowego rozchodzenia się światła:

w ośrodku jednorodnym światło rozchodzi się po liniach prostych, linie to promienie świetlne

b. Prawo niezależności promieni świetlnych:

promienie świetlne przy przecięciu nie wpływają na siebie wzajemnie

c. Prawo odbicia światła:

promień padający, promień odbity i normalna wystawiona w punkcie padania leżą w tej samej płaszczyźnie, a kąt odbicia jest równy kątowi padania.

d. Prawo załamania światła

promień padający, promień załamany i normalna wystawiona w punkcie padania leżą w tej samej płaszczyźnie, a kąt padania α i kąt załamania α'' są powiązane poniższą zależnością, gdzie v_1 i v_2 - odpowiednio prędkość światła w ośrodku z którego światło pada i do którego się załamuje.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \frac{v_1}{v_2}$$

Zasada Fermata:

1. promień świetlny biegnie po takiej drodze, której czas przejścia jest ekstremalny (najkrótszy lub najdłuższy) lub taki sam dla wszystkich promieni
2. promień świetlny biegnie tak, aby jego **droga optyczna** była ekstremalna lub taka sama dla wszystkich promieni.

Droga optyczna opisana jest wzorem:

$$l_{opt} = n l_{geom},$$

l_{geom} - droga geometryczna

n - współczynnik załamania fali

41. Interferencja światła

Interferencja światła

Jest to oddziaływanie fal w przestrzeni, które prowadzi do zmiany rozkładu ich natężenia.

Jeżeli mamy fale dane równaniami:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

wówczas amplituda fali wypadkowej jest dana równaniem:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

Ponieważ natężenie fali jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \delta \rangle$$

Dla normalnych sytuacji uśrednianie cosinusa nie ma znaczenia, a delta zmienia się zupełnie przypadkowo, a więc:

$$I = I_1 + I_2$$

Dla fal spójnych, gdy delta jest stała:

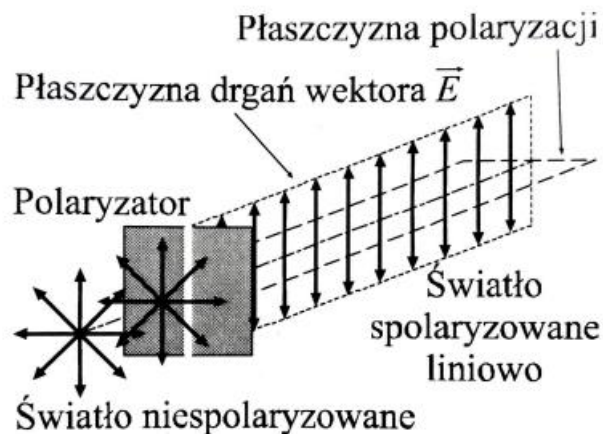
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

42. Dyfrakcja światła

Dyfrakcja to ogół zjawisk obserwowanych przy propagacji światła w ośrodku, w którym występują ostre niejednorodności np. małe otwory. Dyfrakcja prowadzi do ugięcia światła na krawędziach przeszkód i przenikania światła do obszaru cienia geometrycznego

Zasada Huygensa - każdy element powierzchni dS , do którego doszła fala staje się źródłem wtórnej fali kulistej, amplituda której jest proporcjonalna do powierzchni tego elementu. Powstające fale wtórne są koherentne, rozchodzą się tylko do przodu i interferują między sobą. Zaburzenie w dowolnym punkcie jest wynikiem interferencji elementarnych fal wtórnych.

43. Polaryzacja światła. Prawo Malusa



Spolaryzowanym nazywamy światło, w którym drgania wektora świetlnego są w jakikolwiek sposób uporządkowane. Ze względu na uporządkowanie wyróżnia się polaryzację:

- liniową (drgania wektora świetlnego zachodzą w jednym kierunku)
- eliptyczną (koniec wektora świetlnego zakreśla elipsę)
- kołową (koniec wektora świetlnego zakreśla koło)

Płaszczyzna polaryzacji - płaszczyzna prostopadła do tej, w której zachodzą drgania wektora elektrycznego. Światło spolaryzowane można otrzymać przepuszczając światło naturalne przez polaryzator. Drgania równoległe do płaszczyzny polaryzatora są przepuszczane natomiast drgania prostopadłe do niej są tłumione całkowicie lub częściowo.

Prawo Malusa:

Zjawisko dotyczy dowolnych fal poprzecznych

$$I = I_0 \cos^2 \varphi.$$

(1)

φ - kąt jaki tworzy płaszczyzna polaryzacji światła padającego z płaszczyzną polaryzatora

I_0 - natężenie fali spolaryzowanej przed polaryzatorem

I - natężenie fali spolaryzowanej po przejściu przez polaryzator

44. Promieniowanie ciepłe. Zdolność emisyjna. Zdolność absorpcyjna.

Promieniowanie ciepłe występuje, gdy ciało wysyła fale elektromagnetyczne kosztem swojej energii wewnętrznej. Promieniowanie ciepłe zachodzi przy dowolnej temperaturze i jest jedynym rodzajem promieniowania, które może znajdować się w równowadze z promieniującymi ciałami

Luminescencja - promieniowania wzbudzone kosztem energii innej niż wewnętrzna.

Całkowita zdolność emisyjna (1) strumień energii wysyłany przez jednostkę powierzchni promieniującego ciała we wszystkich kierunkach

$$R = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t},$$

(1)

ΔE - całkowita energia wysyłana w czasie Δt przez powierzchnię ΔS ciała.

Zdolność emisyjna(2) - strumień energii wysyłany przez jednostkę powierzchni w przedziale częstości (ω , $\omega + d\omega$). Zależy od temperatury

Zdolność absorpcyjna(3) - wyraża jaką część promieniowania padającego na jego elementarną powierzchnię jest pochłaniana przez ciało.

Ciało doskonale czarne dla wszystkich częstości $a_\omega \equiv 1$. Ciało pochłania całe padające na niego promieniowanie.

Ciało szare - ciało, którego zdolność absorpcyjna nie zależy od częstości, ale jest mniejsza od jedności ($a_\omega = \text{const}$ i $a_\omega < 1$)

$$r_\omega = \frac{dE_\omega}{\Delta S \Delta t d\omega},$$

(2)

dE_ω - energia wysłana w czasie Δt z powierzchni ΔS ciała w postaci fal o częstotliwościach z przedziału (ω , $\omega + d\omega$)

$$a_\omega = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}$$

(3)

$d\Phi_\omega$ - strumień energii padający na powierzchnię elementarną ΔS

$d\Phi'_\omega$ - część strumienia pochłaniana przez ciało

45. Prawo Kirchhoffa. Prawo Stefana-Boltzmannia. Prawo Wiena

Prawo Kirchhoffa - stosunek zdolności emisyjnej do zdolności absorpcyjnej nie zależy od rodzaju ciała i jest dla wszystkich ciał taką samą funkcją częstości i temperatury

$$\left. \frac{r_\omega(T)}{a_\omega(T)} \right|_1 = \left. \frac{r_\omega(T)}{a_\omega(T)} \right|_2 = \left. \frac{r_\omega(T)}{a_\omega(T)} \right|_3 = \dots = f(\omega, T).$$

$f(\omega, T)$ - funkcja Kirchhoffa (zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego)

(Czym większa jest zdolność emisyjna, tym większa musi być również zdolność absorpcyjna)

Prawo Stefana-Boltzmannia - całkowita zdolność emisyjna doskonale czarnego jest proporcjonalna do czwartej potęgi jego temperatury termodynamicznej

$$R = \sigma T^4,$$

σ - stała Stefana-Boltzmannia

R - całkowita zdolność emisyjna

Prawo Wien - iloczyn długości fali, na którą przypada maksimum zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego i jego temperatury termodynamicznej jest wielkością stałą

$$\lambda_m T = b,$$

λ_m - długość fali odpowiadająca maksimum zdolności emisyjnej

b - stała Wien

$$b = \frac{2\pi hc}{4,965k}$$

46. Równowagowa gęstość energii promieniowania a zdolność emisyjna

Jeżeli mamy jakiś obszar zamknięty i jakąś temperaturę ścianek T to możemy powiedzieć, że ma skutek wystąpienia fal elektromagnetycznych przez wnęki tej ścianki, wewnątrz będziemy mieli pewien układ fal. Każda z tych fal niesie pewną energię.

Równowagowa gęstość energii to gęstość energii związania z promieniowaniem cieplnym występującym i podtrzymywanym przez ścianki tego układu. Jest to energia przypadająca na jednostkę objętości odniesiona do pewnego wąskiego przedziału częstotliwości ν będące funkcją ω i T będzie energią zawartą w jednostkowej objętości, ale w pewnym wąskim przedziale $d\omega$.

Gdyby założyć, że jest to ciało doskonale czarne to jego zdolność emisyjna wynosi $\frac{c \cdot u_{\omega, T}}{4\pi}$, gdzie $u_{\omega, T}$ to objętościowa widmowa gęstość energii.

$$u(\omega, T) = \frac{\Delta E}{\Delta V \cdot d\omega}$$

$$\frac{c}{4} u_{\omega, T} = f(\omega, T)$$

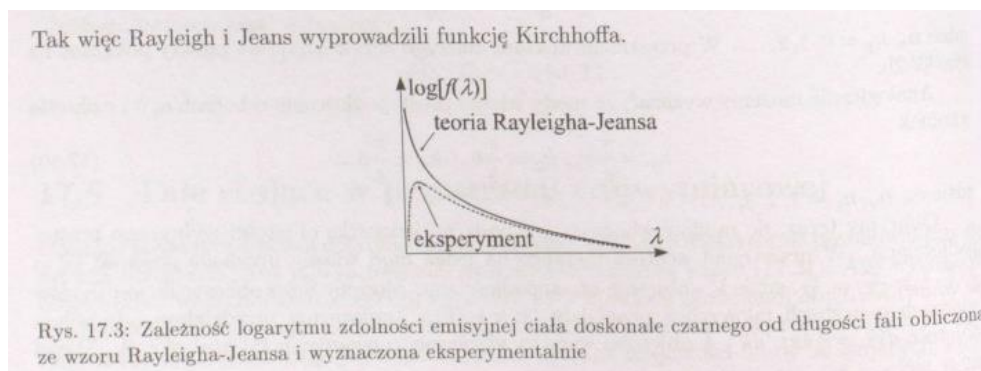
47. Wzór Rayleigha-Jeansa. Wzór Plancka. Korpuskularna natura światła

Wzór reyleigha – jeansa – wyprowadzili wzór określający równowagową gęstość energii ($u(\omega, T)$), wykorzystali zasadę ekwipartycji energii (nr 15). Ta zasada zakłada, że promieniowanie równowagowe w pewnej wnęce może być traktowane jak układ fal stojących, przy czym na każdą z fal przypada średnio energia kT .

$$u(\omega, T) = 2kT \frac{dn_\omega}{d\omega} = kT \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}.$$

Dwa możliwe kierunki polaryzacji

ω – częstość liczby modów



Całkowita zdolność emisyjna obliczona na podstawie wzoru Rayleigha-Jeansa dąży do nieskończoności, co jest sprzeczne z prawem Stefana-Boltzmana. Ciało nie może wypromieniowywać nieskończenie dużo energii. Wniosek jest taki, że wprowadzenie jest git, ale wynik absurdalny.

Wzór Plancka

Planck stworzył opis promieniowania cieplnego oparty na założeniu odcywn zasadom fizyki klasycznej. Przyjął, że promieniowanie elektromagnetyczne jest wysyłane w postaci oddzielnych porcji energii - kwantów. Energię pojedynczego kwantu określa wzór

$$\epsilon = h\nu$$

h - zredukowana stała Plancka

ν - częstotliwość

Założymy że stanowi równowagi termodynamicznej odpowiada pewien układ fal stojących - modów własnych. Jako, że energia jest wysyłana porcjami, to energia poszczególnych modów może przyjmować tylko wartości dyskretne będące wielokrotnością pojedynczego kwantu. W stanie równowagi rozkład energii pomiędzy poszczególnymi modami jest opisany rozkładem Boltzmana. Po paru przekształceniach możemy dliczyć funkcja Kirchhoffa, czyli właśnie wzór Plancka.

$$f(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{h\nu^3}{4\pi^2 c^2} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1}$$

Nie wszystkie zjawiska da się opisać na gruncie fizyki klasycznej. Istnieje szereg zjawisk związanych z falami elektromagnetycznymi, których nie można opisać na gruncie teorii falowej. Należą do nich:

- występowanie krótkofalowej granicy w rentgenowskim widmie hamowania
- zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne i wewnętrzne
- zjawisko Comptona

Wyjaśnienie ich wymaga potraktowania promieniowania elektromagnetycznego jak strumienia cząstek (korpuskuł) rozchodzących się z prędkością światła. Należy założyć również że porcje (kwanty) energii niesione przez cząstki są niepodzielne więc i pochłanianie energii odbywa się tylko kwantami. Pojedynczy kwant promieniowania elektromagnetycznego nosi nazwę fotonu. Fotony to cząstki nieposiadające masy spoczynkowej. Ich prędkość jest równa prędkości światła. Masa fotonu (1), jego pęd (2)

Foton - kwant pola elektromagnetycznego

$$\epsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

$$m_f = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

(1)

ϵ - energia (nagle sie Jurkowi pozmienialo i to nie jest E tylko to jebane kurwa greckie gówno)

h - zredukowana stała Plancka (stała Diraca)

$$p_f = m_f c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

(2)

h - zredukowana stała Plancka (stała Diraca)

Istnieje szereg zjawisk związanych z falami elektromagnetycznymi, których nie można opisać na gruncie teorii faliowej.

Należą do nich:

- występowanie krótkofalowej granicy w rentgenowskim wiświe hamowania
- zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne i wewnętrzne
- zjawisko Comptona

Wyjaśnienie ich wymaga potraktowania promieniowania elektromagnetycznego jako strumienia cząstek (korpuskuł) poruszających się z prędkością światła. Należy założyć, że energia, ze porcje (kwanty) energii niesione przez cząstki są niepodzielne więc i pochłanianie energii odbywa się tylko kwantami. Pojedynczy kwant promieniowania elektromagnetycznego ma masę fotonu. Fotony to cząstki nieposiadające masy spoczynkowej. Ich prędkość jest równa prędkości światła.

$$\text{Masa fotonu} \quad m_f = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}, \quad E - \text{energia}$$

$$\text{Pęd fotonu} \quad p_f = m_f c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

48. Hipoteza de Broglie'a. Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Hipoteza de Broglie'a - głosi że dualizm korpuskularno - faliowy nie powinien być szczególną właściwością promieniowania elektromagnetycznego, lecz jej właściwością uniwersalną. Jeżeli foton o częstotliwości ω ma energię $E = h\omega$ i pęd $p = h/\lambda$, to dowolnej poruszającej się cząsteczce o masie m , pędzie p i energii E można przypisać falę o długości (1) i częstotliwości (2)

$$\lambda_m = \frac{h}{p}$$

(1)
 p - pęd fotonu
 h - stała Plancka

$$\omega_m = \frac{E_m}{\hbar}$$

(2)

Zasada nieoznaczoności Heisenberga(3) - iloczyn nieokreśloności dwóch wielkości sprzężonych nie może być co do rzędu wielkości mniejszy od stałej Plancka

To oznacza że czym dokładniej chcemy określić położenie cząsteczki tym mniej dokładnie możemy określić jej pęd.

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}$$

(3)
 A, B - wielkości sprzężone

49. Równanie Schrödingera. Sens fizyczny funkcji falowej

Schrödinger przyporządkował mikrocząstce zależną funkcję współrzędnych i czasu, którą nazwał funkcją falową i oznaczył Ψ .
Funkcja falowa określa stan mikrocząstki, jest ona rozwiązaniem Równania Schrödingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \Psi = \text{"psi"}$$

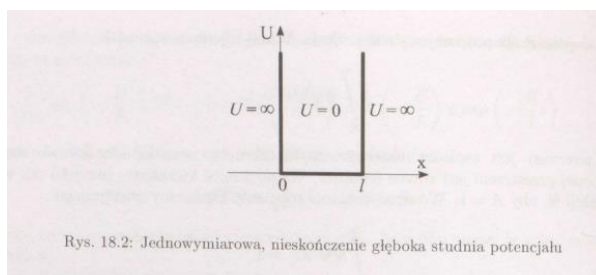
jest ono podstawowym równaniem niereleatywistycznej mechaniki kwantowej i równania tego się nie wyprowadza.
Pozwala ono opisać ewolucję stanu układu kwantowego w czasie w sposób znacznie dokładniejszy, niż czyni to mechanika klasyczna.
Funkcja falowa musi być jednoznaczna, ciągła i skończona, oraz musi posiadać ciągłą i skończoną pierwszą pochodną.
równanie określające funkcję Ψ

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

50. Cząstka w studni potencjału. Kwantowanie energii

Energia potencjalna w studni potencjału określa wzór:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leq x \leq l, \\ \infty, & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x > l \end{cases}$$



Oznacza to że cząstka może znajdować się tylko w obszarze $0 \leq x \leq l$.

Bezczasowe równanie Schrödingera dla tego przypadku:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad \text{- jest to analogia do równań drgań}$$

Jako, że cząstka nie może wyjść poza studnię potencjału, to funkcja ψ poza studnią jak i na brzegach studni (wynika to z warunku ciągłości) musi być równa zero:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

oznacza to że cząstka może znajdować się tylko w obszarze gdzie energia potencjalna jest równa 0. Z tego wynika równanie fali:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x + \alpha\right)$$

gdzie A i α - stałe. Z warunków brzegowych mamy

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0,$$

skąd $\alpha = 0$, oraz

$$\psi(l) = A \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}l\right) = 0,$$

skąd

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}l = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Przekształcając ostatni warunek otrzymujemy

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2.$$

Dokonując odpowiednich przekształceń otrzymujemy że energia cząstki w studni potencjału może przyjmować tylko wartości dyskretne czyli jest skwantowana. Kwantowanie energii wynika z faktu, że obszar w którym może znajdować się cząstka jest ograniczony. Po uwzględnieniu warunków brzegowych funkcja ma postać:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Fakt zamknięcia cząstki powoduje że energia jest skwantowana (energia ma ściśle określoną wartość).

$$\int_0^l \psi^2 dV = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

51. Kwantowy oscylator harmoniczny. Zjawisko tunelowe.

Oscylator harmoniczny:

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Równanie Schrödingera:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) = 0$$

Rozwiązanie tego równania istnieje tylko i wyłącznie wtedy, gdy energię można zapisać wzorem

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad \text{gdzie } n=0,1,2,\dots$$

Jest to kwantowanie energii.

$$E_{\min} = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

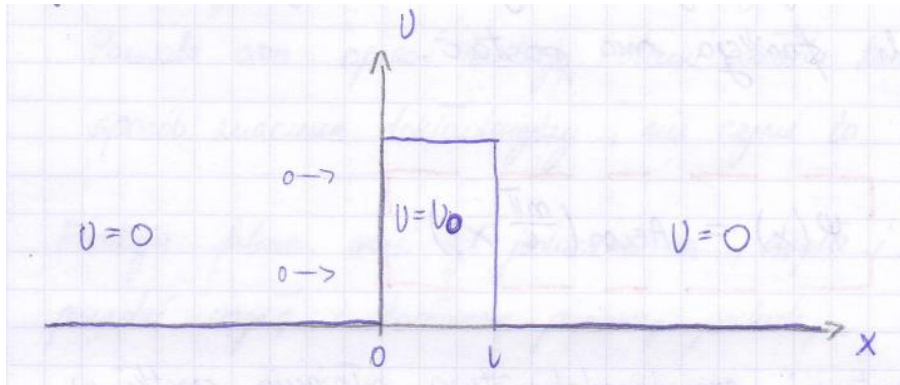
Zmiana energii między poziomami energetycznymi:

$$\Delta E = E_n - E_{n-1} = \hbar \omega$$

Reguła wyboru (mówi o tym, jak mogą zmieniać się liczby kwantowe):

$$\Delta n = \pm 1 \quad \text{- tylko o 1 poziom energetyczny}$$

Zjawisko tunelowe:



Prawdopodobieństwo transmisji cząstki przez barierę:

$$D \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}} \quad E < U_0$$

Istnieje też prawdopodobieństwo, gdy $E > U_0$, że cząstka odbije się od bariery (przykład różnicy między mechaniką kwantową a klasyczną).

Zjawisko tunelowe jest to zjawisko przechodzenia przez bariery potencjału. Jest ono często wykorzystywane w elektronice (diody tunelowe, diody Zenera).

52. Budowa atomu. Spin elektronu. Liczby kwantowe.

MODEL THOMSONA

Zbudowany z jednorodnej kuli naładowanej dodatnio, wewnątrz której znajdują się ujemnie naładowane elektrony. Atom jest jako całość elektrycznie obojętny – całkowity ładunek dodatni jest równy ładunkowi elektronu.

Wyjaśniał wysyłanie przez atom fal monochromatycznych gdy elektron wykonywał drgania harmoniczne, gdy

$$F = -kr.$$

r-wychylenie z położenia równowagi

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3} r$$

(siła działająca na elektron)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_e}} = \frac{2}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 m_e R^3}}$$

(częstość drgań elektronu)

$$R = \sqrt[3]{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e \omega^2}}$$

(rozmiar atomu)

Model Rutherforda – Układ ładunków złożony z umieszczonego centralnie dodatniego jądra o ładunku Ze (Z – liczba atomowa równa liczbie protonów w jądrze), skupiającego prawie całą masę i mającego rozmiary nie większe niż $10^{-14}m$ oraz rozmieszczonego wokół jądra Z elektronów. Elektrony są rozłożone w całej objętości zajmowanej przez atom. Model pozwalał wytłumaczyć wyniki doświadczalne otrzymane przez Rutherforda i jego współpracowników. Jednakże model taki jest sprzeczny z prawami mechaniki i elektrodynamiki klasycznej. Układ nieruchomych ładunków nie może znajdować się w stanie równowagi trwałej. Dlatego Rutherford musiał dodatkowo założyć, że elektrony poruszają się wokół jądra po torach krzywoliniowych. Jednak w takim przypadku elektron ma pewne przyspieszenie i zgodnie z elektrodynamiką klasyczną powinien nieprzerwanie wysyłać fale elektromagnetyczne.

Wysyłanie promieniowania powoduje straty energii, tak więc energia elektronu powinna nieprzerwanie maleć i elektron powinien spaść na jądro. Zgodne z prawami fizyki klasycznej **ten model atomu nie jest układem stabilnym**

MODEL BOHRA

Atom wodoru Bohr przyjął wprowadzony przez Ernesta Rutherforda model atomu, według którego elektron krąży wokół jądra jako naładowany punkt materialny, przyciągany przez jądro siłami elektrycznymi. Model nie jest kwantowy ani klasyczny. Działa tylko dla atomu wodoru.

- Zamiast nieskończonej liczby orbit dozwolonych z punktu widzenia mechaniki klasycznej, elektron może poruszać się tylko po pewnych dozwolonych orbitach.
- Podobnie jak oscylatory Plancka, tak samo atom wodoru może znajdować się tylko w ściśle określonych stacjonarnych stanach energetycznych, w których, pomimo, że elektron doznaje przyspieszenia (poruszając się po orbicie) nie wypromieniowuje energii. Jego całkowita energia pozostaje stała.
- Promieniowanie elektromagnetyczne zostaje wysłane tylko wtedy gdy elektron poruszający się po orbicie o całkowitej energii E_j zmienia swój ruch skokowo, tak że porusza się następnie po orbicie o niższej energii E_k (rysunek 33.3 poniżej).

Całkowita energia w atomie

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R}$$

Wartość najniższego poziomu energetycznego wynosi -13.6 eV.

Spin elektronu

Elektron posiada własny moment pędu jako cząsteczka wiązany z ruchem wirowym wokół własnej osi M_s – spin. Model, w którym elektron jest naładowana kulką o masie m i ładunku e nie jest poprawny, ponieważ wykonując ruch obrotowy musiałby posiadać pewien moment magnetyczny. Spin jest właściwością kwantową i relatywistyczną. Spinowy moment mechaniczny

$$M_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar,$$

Spinowy moment mechaniczny

$$M_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad \text{gdzie } s = \frac{1}{2} \text{ (spinowa liczba kwantowa)}$$

$$M_{sz} = m_s \hbar \quad \text{gdzie } m_s = \pm \frac{1}{2} \text{ (magnetyczna spinowa liczba kwantowa)}$$

Rzut tego momentu na zewnętrzny kierunek

Stosunek żyromagnetyczny:

$$\frac{\mu}{M} = \frac{q}{2m}$$

Stosunek momentu magnetycznego do momentu mechanicznego dla wszystkich cząstek klasycznych to ładunek takiej cząstki przez jej podwojoną masę

Podsumowując, elektron w atomie opisują 4 liczby kwantowe: n, l, m, m_s

n – główna liczba kwantowa

l – azymutalna liczba kwantowa

m – magnetyczna liczba kwantowa

m_s – magnetyczna spinowa liczba kwantowa

53. Zasada (zakaz) Pauliego.

Jeżeli mamy atom to w tym atomie nie mogą się znaleźć dwa elektrony, które miałyby wszystkie liczby kwantowe takie same. (Energia takich dwóch elektronów może być taka sama, bo energia zależy tylko od n i l)

Na powłoce mamy maksymalnie $2n^2$ elektronów. Elektrony nie mogą się wszystkie gromadzić w najniższym stanie energetycznym (muszą te stany zapełniać po kolei od najniższego do najwyższego).

Fermiony – cząstki o połówkowym spinie (dla których $s = np. \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$). **Podlegają zakazowi Pauliego.** (są opisane statystyką Fermiego-Diraca)

Np. elektron, proton,
neutron

Bozony – cząstki o całkowitym spinie ($s = np. 0, 1, 2, 3, \dots$). **Nie podlegają zakazowi Pauliego.**

Cząstki złożone z dwóch fermionów.
Fonony, które mają tendencję do gromadzenia się w jednym stanie

Bozony to cząstki kolektywne. Mają tendencję do gromadzenia się w tym samym stanie kwantowym. Wszystkie chcą być identyczne

54. Siły międzyatomowe.

Siły międzyatomowe są zależne od odległości między tymi atomami. Jeśli zacząć je przyciągać początkowo pojawi się siła przyciągania, następnie pojawi się stan równowagi, następnie zaczną pojawiać się siły odpychania o charakterze elektrycznym. Minimum jest wymagane by układ był stabilny. Przyciąganie musi się zmieniać wolniej niż odpychanie. Energia potencjalna osiąga minimum

$$U(r) = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n}$$

A - przyciągania
B - odpychanie

55. Ciała krystaliczne i bezpostaciowe

Ciała krystaliczne:

Uporządkowanie dalekiego zasięgu – tworzy się sieć krystaliczna. Jeżeli wybierzemy jakieś miejsce w przestrzeni, to kolejne atomy są rozłożone w sposób regularny i możemy przewidzieć wychodząc od któregośkolwiek z nich gdzie będą następne. Jeżeli mamy idealny kryształ (monokryształ) to to uporządkowanie obejmuje cały materiał.

Anizotropia – zależność właściwości fizycznych od kierunków w kryształach. Wszystkie właściwości fizyczne (opór elektryczny, magnetyczne, mechaniczne) zależą od kierunku w kryształach.

Określona temperatura topnienia – dokładnie określone temperatury przejść fazowych. Dotyczy wszystkich kryształów

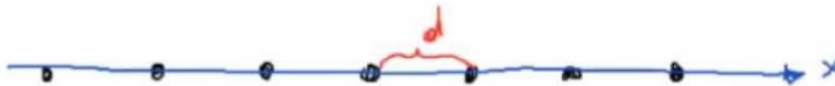
Ciała bezpostaciowe (amorficzne):

Uporządkowanie krótkiego zasięgu – jeżeli weźmiemy jakiś atom to sąsiedzi będą rozłożeni w sposób regularny. Na małych odległościach możemy stwierdzić, że struktura jest uporządkowana, ale po przesunięciu się dalej uporządkowanie to zanika.

Izotropia – brak zależności właściwości fizycznych od kierunku.

Brak wyraźnej temperatury topnienia – brak wyraźnej temperatury przejścia fazowego.

56. Pasma energetyczne w kryształach.

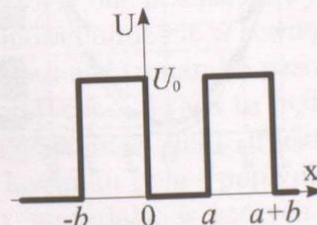


Zakładamy kryształ jednowymiarowy (czyli taki, w którym atomy są równomiernie rozłożone na osi x).

Jednowymiarowym, przybliżonym modelem okresowego pola potencjalnego w kryształach jest nieskończony szereg prostokątnych studni potencjalnych o szerokości a , oddzielonych barierami potencjału o wysokości U_0 i szerokości b .

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } n(a+b) < x < a+n(a+b), \\ U_0, & \text{dla } n(a+b) - b < x < n(a+b), \end{cases}$$

Gdzie $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2$ Model nosi nazwę modelu Kroniga-Penneya:



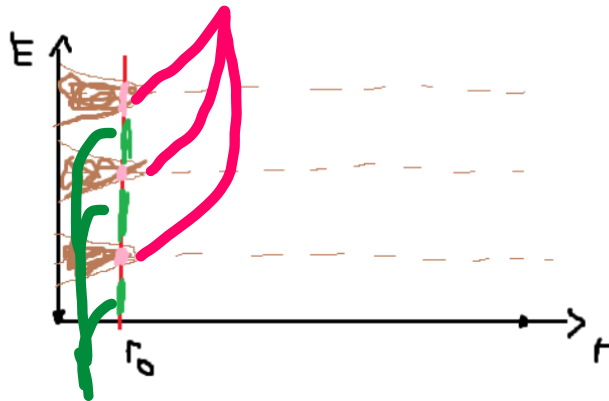
Rys. 22.1: Energia potencjalna w modelu Kroniga-Penneya

Do powyższego rysunku:

Każdy atom tworzy studnię potencjału, w której znajdują się jego elektrony. Łącząc wszystkie studnie otrzymamy okresową strukturę energetyczną, która wyznacza bariery potencjału.

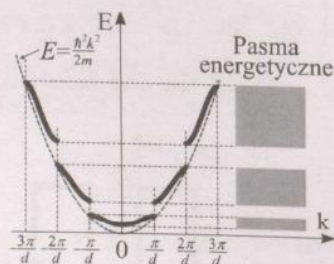
Z zakazu Pauliego wynika, że elektrony będą musiały się zróżnicować (jeden będzie musiał obniżyć poziom energetyczny a drugi podnieść). Przedział energii to poziomy wszystkich atomów tworzących kryształ. Skutkiem tej sytuacji jest pojawienie się na skali energii poziomów dozwolonych rozdzielonych poziomami zabronionymi.

Dozwolone przedziały energetyczne



Zabronione przedziały energetyczne

Zależność energii całkowitej od pędu. Dla elektronu swobodnego mamy parabolę. Jeżeli rozpatrzmy elektron w kryształ, na skali energii pojawią się punkty charakterystyczne określone okresowością. Jeżeli poprowadzimy zależność wyliczoną z mechaniki kwantowej, okaże się, że na brzegach obszarów tych granic, zależność energii od pędu się zmienia. Tworzą się przedziały energii dozwolonych, które będą oddzielone przedziałami energii gdzie nie znajdziemy elektronów. **Na skutek tworzenia się kryształu i jego regularnej budowy, wszystkie elektrony tworzą jeden układ kwantowy, w związku z czym muszą one różnić się czymś między sobą. Poziomy energetyczne przesuwają się względem siebie po to żeby był spełniony zakaz pauliego i tworzą pasma energetyczne. Mamy w kryształach dozwolone i zabronione przedziały energii**



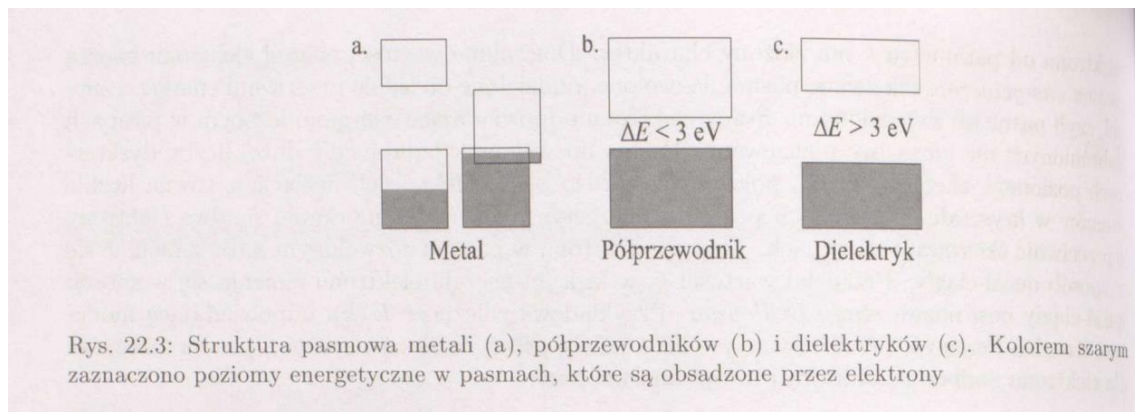
Rys. 22.2: Zależność energii elektronu od liczby falowej w modelu Kroniga-Penneya. Linia przerywaną pokazano tę samą zależność dla elektronu swobodnego. Z prawej strony zaznaczono dozwolone przedziały energii elektronu

Zależność elektronu od parametru k (liczby falowej elektronu) ma charakter złożony. Dozwolone wartości energii elektronu tworzą pasma energetyczne, tak zwane pasma dozwolone, one oddzielone są od siebie przerwami energetycznymi, czyli pasmami zabronionymi. Pasma dozwolone składają się z dużej liczby dyskretnych poziomów energetycznych, położonych bardzo blisko siebie. A ich liczba jest równa liczbie atomów w kryształ. Na każdym poziomie energetycznym mogą znajdować się dwa elektrony o przeciwnie skierowanych spinach. Przedział wartości k , w których energia elektronu zmienia się w sposób quasi-ciągły (czyli teoretycznie mógłby mieć cechę ciągłe, ale w praktyce przybiera wartość skończoną) to strefa Brillouina. Dla elektronu swobodnego zależność odpowiadającą modelowi Kroniga- Penneya opisano wzorem:

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

Pasma walencyjne-pasma w którym są elektrony walencyjne. Pasma przewodnictwa-najniższe pasmo z wolnymi poziomami energetycznymi

57. Struktura pasmowa a własności elektryczne ciał stałych



Istnienie pasm energetycznych pozwala wyjaśnić istnienie trzech grup materiałów o różnych własnościach elektrycznych:

METALE

Pasma walencyjne może nie być całkowicie wypełnione elektronami. Taka sytuacja jest możliwa, gdy na ostatnim poziomie energetycznym w atomie znajduje się jeden elektron. Wówczas części elektronów wystarczy dostarczyć niewielką energię, aby mogły one przejść na wyższe, wolne poziomy energetyczne.

Jeśli materiał o takiej strukturze pasmowej znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym, to pole elektryczne będzie mogło wykonywać pracę nad elektronami z pasma walencyjnego (przez co przejdą na wyższe poziomy energetyczne). Praca polega na dostarczeniu energii kinetycznej, przez co

zyskają dodatkową prędkość w kierunku przeciwnym do pola -> popłynie prąd elektryczny

W skrócie:

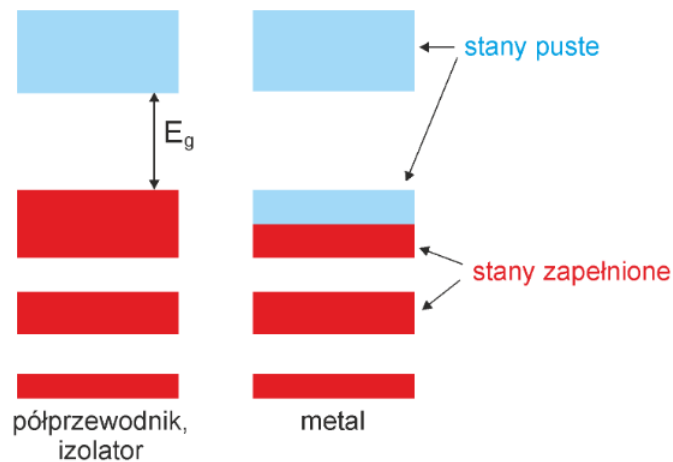
W metalach, w tylko częściowo zapełnionym paśmie, elektrony mają swobodę ruchu, bo mogą pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego zwiększyć swoją energię do nieobsadzonego poziomu energetycznego, co oznacza przepływ prądu.

PÓŁPRZEWODNIKI

Pasmo walencyjne w temperaturze bezwzględnego zera ($-273\text{ C} = 0\text{ K}$) jest całkowicie zapełnione elektronami, a pasmo przewodnictwa jest puste i oddzielone wąskim pasmem zabronionym. Przyjmujemy, że materiał jest półprzewodnikiem jeśli przerwa energetyczna nie przekracza 3 eV . W półprzewodnikach szerokość przerwy energetycznej jest mniejsza i w temperaturze pokojowej część elektronów walencyjnych uzyskuje odpowiednie energie i znajduje się w pasmie przewodzenia stając się nośnikami prądu. W temperaturze 0 K przewodnik nie przewodzi prądu elektrycznego, a wraz ze wzrostem temperatury przewodność elektryczna półprzewodników rośnie.

DIELEKTRYKI (IZOLATORY)

Struktura pasmowa dielektryków jest taka sama jak półprzewodników, z jedną różnicą – w dielektrykach przerwa energetyczna jest szeroka przez co elektrony nie są w stanie przejść z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa, czyli nie mogą brać udziału w zjawisku transportu.



Rys. 37.3. Struktura pasmowa izolatora, półprzewodnika i metalu

58. Dynamika elektronów w sieci krystalicznej. Masa efektywna

Elektron poruszający się w kryształ ma pęd p , który jest związany z wektorem falowym k poniższą zależnością:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}.$$

Aby opisać ruch elektronu w kryształ (jego prędkość i przyspieszenie) musimy w sposób przybliżony lokalizować go w przestrzeni. Czyli nieoznaczoność położenia elektronu Δx musi mieć skończoną wartość.

Prędkość elektronu w kryształ:

$$v_g = \frac{d}{dk} \left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{dk}.$$

energia elektronu
coś z liczba falowa chyba

czym jest \hbar ?

Rozpatrzmy teraz ruch elektronu pod działaniem zewnętrznego pola elektrycznego o natężeniu \vec{E} . Na elektron, oprócz siły \vec{F}_{kr} związanej z polem sieci krystalicznej, działa wtedy siła $\vec{F} = -e\vec{E}$ ze strony pola elektrycznego. Siła ta powoduje ruch elektronu z prędkością v_g w kierunku przeciwnym do pola. W czasie dt pole elektryczne wykonuje nad elektronem pracę

$$dA = \vec{F} \circ d\vec{s} = eE ds = eE v_g dt = eE \frac{1}{\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{dk} dt. \quad (22.14)$$

Praca ta powoduje przyrost energii elektronu w kryształ o $d\mathcal{E} = dA$. Podstawiając do równania (22.14) otrzymujemy

$$\frac{eE}{\hbar} = \frac{dk}{dt}. \quad (22.15)$$

Obliczmy teraz przyspieszenie elektronu

$$a = \frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2\mathcal{E}}{dk dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2\mathcal{E}}{dk^2} \frac{dk}{dt} = \frac{eE}{\hbar^2} \frac{d^2\mathcal{E}}{dk^2}. \quad (22.16)$$

Zapiszmy ostatnie równanie w następująco

$$eE = \frac{\hbar^2}{d^2\mathcal{E}} \frac{dv_g}{dt} \quad (22.17)$$

i porównajmy z drugą zasadą dynamiki Newtona

$$F = m \frac{dv}{dt}. \quad (22.18)$$

Z porównania wynika, że czynnik

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2\mathcal{E}} \quad (22.19)$$

pełni formalnie w stosunku do siły $\vec{F} = -e\vec{E}$ rolę masy. Wielkość m^* nosi nazwę *masy efektywnej* elektronu w kryształ.

59. Przybliżenie elektronów swobodnych. Gaz elektronowy. Funkcja gęstości stanów

Gaz elektronowy – tworzony przez elektrony walencyjne w metalach, które mogą się swobodnie przemieszczać w obrębie kryształu (traktowane jak elektrony swobodne)

Energia potencjalna elektronu swobodnego $U=0$ więc równanie Schrodingera dla elektronu swobodnego ma postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi.$$

Rozwiązaniem tego równania jest wzór:

$$\psi = C \exp(i\vec{k}\vec{r}),$$

gdzie $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ - wektor falowy elektronu o pędzie \vec{p} .

Funkcja falowa korzystając z warunku normowania $C = L^{-\frac{3}{2}}$

$$\psi = L^{-\frac{3}{2}} \exp(i\vec{k}\vec{r}).$$

Gdzie L – długość boku sześcianu

Zał. C – jest rzeczywiste

Funkcja ψ jest okresowa, a okres tych zmian jest równy L jeśli składowe wektora falowego elektronu spełniają warunki

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi}{L} n_x, \\ k_y &= \frac{2\pi}{L} n_y, \\ k_z &= \frac{2\pi}{L} n_z, \end{aligned}$$

gdzie $n_x, n_y, n_z = 0 \pm 1 \pm 2$

Energia całkowita elektronu jest jego energią kinetyczną bo $U = 0$:

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

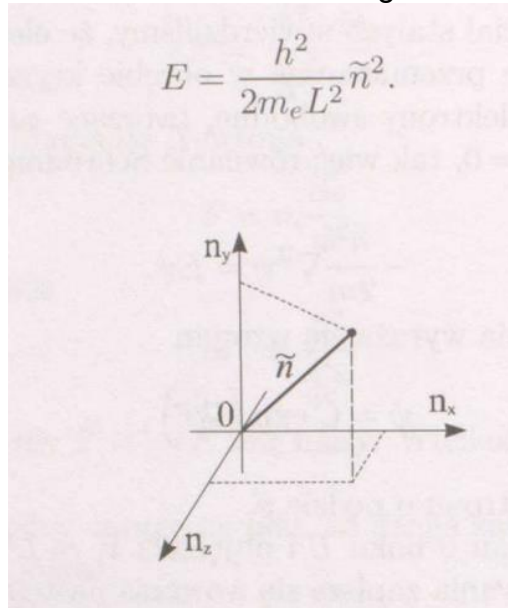
n_x, n_y, n_z – liczby kwantowe określające stan elektronu w gazie elektronowym

$m_s = \pm 1/2$ spinowa liczba kwantowa

$$\tilde{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2,$$

Jeżeli: to energia elektronu w gazie elektronowym:

$$E = \frac{h^2}{2m_e L^2} \tilde{n}^2.$$



Funkcja gęstości stanów określa liczbę stanów energetycznych przypadających na jednostkę objętości i jednostkowy przedział energii

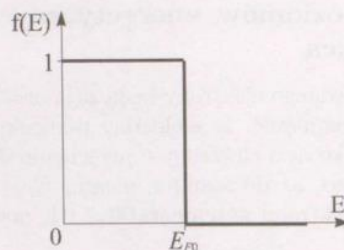
$$g(E) = \frac{d\nu_E}{\Delta V dE} = 4\pi \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} E^{\frac{1}{2}}.$$

60. Poziom Fermiego

Wartość energii Fermiego można obliczyć ze wzoru:

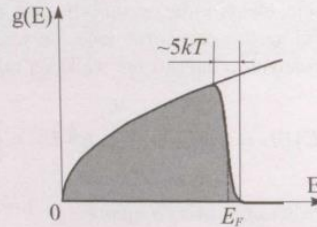
$$E_{F0} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Dla zera bezwzględnego wszystkie stany o energii mniejszej od E_{F0} są obsadzone przez elektrony, a stany większe od E_{F0} są wolne



Rys. 22.6: Funkcja rozkładu elektronów w temperaturze zera bezwzględnego

Wraz ze wzrostem temperatury elektrony mogą otrzymać energię pozwalającą im przejść na wyższe poziomy energetyczne. Jednak porównując wartość energii Fermiego w 0 K z wartością iloczynu kT , który w temperaturze 300 K jest równy $25,6 \times 10^{-3}$ eV stwierdzamy, że możliwość przejścia na wyższe, wolne poziomy energetyczne będą miały tylko elektrony o energiach bliskich energii Fermiego. Stan większości elektronów walencyjnych nie będzie ulegał zmianie. Przykładowy schemat zapełnienia poziomów energetycznych w temperaturze $T > 0$ K przedstawia rys. 22.7. Prawdopodobieństwo obsadzenia poziomów energetycznych opisuje funkcja



Rys. 22.7: Zapełnienie poziomów energetycznych w temperaturze wyższej od 0 K (E_F - poziom Fermiego)

rozkładu Fermiego-Diraca, wyrażona wzorem

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right) + 1}, \quad (22.37)$$

gdzie E_F - energia Fermiego. Z funkcją tą spotkaliśmy się już w rozdziale 19 - równanie (19.43). Przykładowe wykresy rozkładu Fermiego-Diraca dla kilku temperatur ilustruje rys. 22.8.

Z wzoru (22.37) wynika definicja energii Fermiego E_F :

energia Fermiego odpowiada poziomowi energetycznemu, prawdopodobieństwo zapełnienia którego jest równe $\frac{1}{2}$.

Poziom ten nosi nazwę *poziomu Fermiego*.

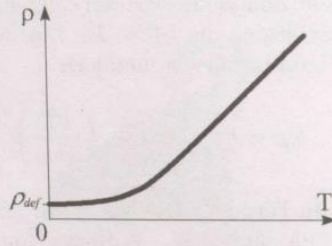
61. Przewodnictwo elektryczne metali

Jeżeli założymy, że sieć krystaliczna metalu jest doskonała, nie zawiera defektów i atomy znajdując się dokładnie w węzłach sieci, to przy opisie przewodnictwa elektrycznego w metalu w ra-

mach mechaniki kwantowej dojdziemy do wniosku, że na poruszające się elektrony nie działają żadne siły oporu. Przewodność elektryczna metali powinna więc być nieskończenie duża. Z doświadczenia wiadomo, że tak nie jest. Tak więc źródła oporu elektrycznego metali należy upatrywać w niedoskonałościach sieci krystalicznej. Na niedoskonałość sieci składają się dwie przyczyny. Doskonała okresowość sieci krystalicznej jest naruszana przez występujące w rzeczywistych kryształach defekty - atomy zanieczyszczeń, dyslokacje, granice ziaren, itp. Oprócz tego atomy w węzłach sieci wykonują drgania cieplne, co również powoduje naruszenie jej okresowości. Opór elektryczny jest spowodowany rozpraszaniem poruszających się wewnątrz kryształu elektronów na defektach sieci i drganiach cieplnych (fononach). Z powyższych rozważań wynika, że opór właściwy metalu ρ może być zapisany w postaci sumy dwóch składników

$$\rho = \rho_{drg} + \rho_{def}, \quad (22.41)$$

gdzie ρ_{drg} - opór związany z drganiami cieplnymi sieci, a ρ_{def} - opór spowodowany defektami struktury krystalicznej. Składnik uwarunkowany drganiami cieplnymi sieci maleje wraz z obniżaniem się temperatury i w temperaturach bliskich 0 K jest bardzo mały. Drugi ze składników, związany z defektami struktury, nie zależy od temperatury i powoduje tak zwany opór resztkowy metalu, który jest odpowiedzialny za wartość oporu mierzonego w niskich temperaturach. Przykładową zależność oporu właściwego metalu od temperatury pokazano na rys. 22.9.



Rys. 22.9: Przykładowa zależność oporu właściwego metalu od temperatury

Znajdźmy teraz związek pomiędzy przewodnością elektryczną metali σ i wielkościami opisującymi ruch elektronów w sieci krystalicznej. Niech w jednostce objętości metalu znajduje się n elektronów swobodnych. Ich średnią prędkość, zwaną prędkością unoszenia, określa wzór

$$\vec{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i. \quad (22.42)$$

Jeżeli na elektrony nie działa zewnętrzne pole elektryczne, to prędkość unoszenia jest równa zero, w metalu nie płynie prąd elektryczny. Jeżeli metal umieścić w polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} , to na każdy elektron działa ze strony pola siła

$$\vec{F}_E = -e\vec{E}. \quad (22.43)$$

Z prawa Ohma w postaci różniczkowej (9.26) wynika, że gęstość prądu płynącego przez metal jest proporcjonalna do natężenia pola

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (22.44)$$

Z drugiej strony gęstość prądu jest związana z prędkością unoszenia

$$\vec{j} = -en\vec{u}. \quad (22.45)$$

Porównanie dwóch ostatnich wzorów prowadzi do wniosku, że prędkość unoszenia musi być proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego i stała w stałym polu elektrycznym. Sytuacja taka jest możliwa, jeżeli na elektrony przewodnictwa, oprócz siły \vec{F}_E , działa siła oporu proporcjonalna do ich prędkości

$$\vec{F}_O = -r\vec{u}, \quad (22.46)$$

gdzie r - współczynnik proporcjonalności. Równanie ruchu dla „średniego” elektronu ma więc postać

$$m_e \frac{d\vec{u}}{dt} = -e\vec{E} - r\vec{u}. \quad (22.47)$$

Przypomnijmy w tym miejscu, że opisując ruch elektronów w sieci krystalicznej powinniśmy właściwie posługiwać się masą efektywną elektronów m^* , a nie ich masą rzeczywistą m_e . Jednak w metalach $m^* \approx m_e$.

Znajdźmy sens fizyczny współczynnika r . Jeżeli po ustaleniu się prędkości unoszenia wyłączono pole elektryczne, to równanie (22.47) przyjmuje postać

$$m^* \frac{d\vec{u}}{dt} = -r\vec{u} \quad (22.48)$$

i opisuje przejście układu do nowego stanu równowagi $\vec{u}(t \rightarrow \infty) = 0$. Rozwiązanie tego równania wygląda następująco

$$\vec{u}(t) = \vec{u}(0) \exp\left(-\frac{r}{m_e}t\right) = \vec{u}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (22.49)$$

gdzie $\vec{u}(0)$ - prędkość unoszenia w chwili wyłączenia pola, a $\tau = \frac{m_e}{r}$ - czas, po którym prędkość unoszenia maleje e razy. Czas ten jest nazywany *czasem relaksacji*.

Wróćmy teraz do równania ruchu elektronów przewodnictwa. W stanie ustalonym wypadkowa siła działająca na elektron jest równa zero

$$m_e \frac{d\vec{u}}{dt} = -e\vec{E} - r\vec{u} = 0, \quad (22.50)$$

co pozwala znaleźć związek pomiędzy ustaloną wartością prędkości unoszenia i natężeniem pola elektrycznego

$$\vec{u} = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E} = -\mu \vec{E}, \quad (22.51)$$

gdzie $\mu = \frac{e\tau}{m_e}$ - ruchliwość elektronów. Podstawiając wzór (22.51) do równania (22.45) mamy

$$\vec{j} = en\mu \vec{E}. \quad (22.52)$$

Porównanie powyższego równania z zapisanym wcześniej prawem Ohma (9.26) pozwala znaleźć związek między przewodnością elektryczną metalu i parametrami opisującymi elektrony przewodnictwa

$$\sigma = en\mu = \frac{e^2 n \tau}{m_e}. \quad (22.53)$$

W klasycznej teorii przewodnictwa elektrycznego metali gaz elektronowy jest traktowany jak gaz doskonały. Istnienie skończonego oporu elektrycznego jest tłumaczone zderzeniami elektronów, spowodowanymi ruchami cieplnymi. Ruchy cieplne zaburzają uporządkowany ruch elektronów w polu elektrycznym. Taki model prowadzi do wzoru określającego przewodnictwo elektryczne metali w postaci

$$\sigma_{kl} = \frac{e^2 n \tau'}{2m_e}, \quad (22.54)$$

gdzie τ' - średni czas między kolejnymi zderzeniami. Zwróćmy uwagę, że wzór ten różni się od wyprowadzonego w ramach mechaniki kwantowej wzoru (22.53) tylko interpretacją czasu τ i cyfrą 2 w mianowniku. Tak więc formalnie różnica jest niewielka. Jednak w rzeczywistości różnica pomiędzy teorią klasyczną i kwantową przewodnictwa elektrycznego metali jest znacznie głębsza. W teorii klasycznej zakłada się, że wszystkie elektrony walencyjne tworzące gaz elektronowy mogą się swobodnie poruszać w obrębie kryształu. Z modelu budowanego w oparciu o mechanikę kwantową wynika, że w zjawiskach transportu mogą brać udział tylko elektrony o energiach bliskich energii Fermiego, bowiem tylko te elektrony mają w pobliżu wolne poziomy energetyczne i mogą zmienić swoją energię, uzyskując dodatkową prędkość.

62. Przewodnictwo ciepłe metali. Prawo Wiedemanna-Franza

W metalach istnieją dwa mechanizmy przenoszenia ciepła - przez sieć krystaliczną i za pośrednictwem elektronów przewodnictwa. Przenoszenie ciepła przez sieć krystaliczną ma miejsce również w dielektrykach. Jest to tak zwane przewodnictwo fononowe. Jednak z doświadczenia wiadomo, że metale przewodzą ciepło znacznie lepiej od większości dielektryków. Wynika z tego, że musi w nich istnieć efektywniejszy mechanizm przenoszenia ciepła. Jest nim transport ciepła przez elektrony przewodnictwa.

Dla prostoty rozpatrzmy zjawisko przewodnictwa ciepłego metali w oparciu o model klasyczny. Potraktujmy elektrony przewodnictwa jak gaz jednoatomowy. Współczynnik przewodnictwa ciepłego gazu, określony wzorem (9.21)

$$\kappa_{kl} = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V = \frac{1}{3} n m_e \langle v \rangle \lambda c_V, \quad (22.55)$$

gdzie indeks „kl” oznacza, że posługujemy się modelem klasycznym. Izochoryczne ciepło właściwe dla gazu jednoatomowego

$$c_V = \frac{3R}{2\mu} = \frac{3k}{2m}, \quad (22.56)$$

gdzie μ - masa molowa. Średnia droga swobodna elektronów może być wyrażona poprzez średni czas między zderzeniami

$$\lambda = \langle v \rangle \tau'. \quad (22.57)$$

Podstawiając dwa ostatnie równania do wzoru na współczynnik przewodnictwa ciepłego i korzystając z zasady ekwipartycji energii (8.5), zgodnie z którą $\frac{m\langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ mamy

$$\kappa_{kl} = \frac{3k^2 n \tau' T}{2m}. \quad (22.58)$$

Za transport ładunku (przewodnictwo elektryczne) i transport ciepła (przewodnictwo ciepłe) w metalach są odpowiedzialne elektrony tworzące gaz elektronowy. Można się więc spodziewać, że współczynnik przewodnictwa ciepłego κ i przewodność elektryczna σ będą ze sobą powiązane. Znajdźmy stosunek tych dwóch wielkości wyprowadzonych w ramach modelu klasycznego

$$\frac{\kappa_{kl}}{\sigma_{kl}} = \frac{\frac{3k^2 n \tau' T}{2m}}{\frac{e^2 n \tau'}{2m}}. \quad (22.59)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\frac{\kappa_{kl}}{\sigma_{kl}} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (22.60)$$

Otrzymaliśmy prawo Wiedemanna-Franza, zgodnie z którym

dla metali stosunek współczynnika przewodnictwa ciepłego do przewodności elektrycznej jest w danej temperaturze stały i proporcjonalny do temperatury.

Prawo to pozostaje w dobrej zgodności z danymi doświadczalnymi dla wielu metali. Poprawne, oparte na teorii kwantowej, wyprowadzenie prawa Wiedemanna-Franza prowadzi do wzoru

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (22.61)$$

Różni się on od wersji „klasycznej” jedynie wartością współczynnika liczbowego - 3 zostało zastąpione przez $\frac{\pi^2}{3} \approx 3,29$. Tak więc błąd popełniany przy obliczeniach ze wzoru klasycznego jest równy około 10%.

Prawo Wiedemanna-Franza jest również zapisywane w postaci

$$\frac{\kappa}{\sigma} = LT, \quad (22.62)$$

gdzie L - liczba Lorentza.

63. Półprzewodniki - podstawowe własności

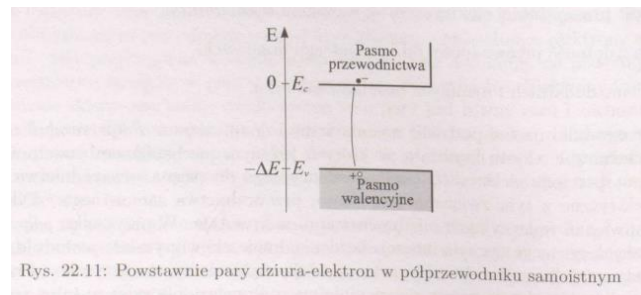
1. W zerze bezwzględnym półprzewodniki nie przewodzą prądu elektrycznego (przewodność elektryczna $\sigma=0$).
2. Wraz ze wzrostem temperatury rośnie przewodność elektryczna.
3. Przewodność cieplna silnie zależy od domieszek
4. Dwa rodzaje nośników prądu: elektrony (-), dziury (+).

do 4 pkt. Istnienie dodatnich i ujemnych nośników ładunku

Typowe półprzewodniki: german i krzem.

64. Przewodnictwo elektryczne półprzewodników samoistnych

Półprzewodnikami samoistnymi są chemicznie czyste kryształy, w których jedynym mechanizmem powstania nośników ładunku jest przejście elektronu z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. Przewodnictwo elektryczne z tym związane nosi nazwę przewodnictwa samoistnego.



Koncentracja dziur p_i i elektronów n_i są zawsze równe w przypadku przewodnictwa samoistnego:

$$n_i = p_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$$

gdzie: $N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ - efektywna gęstość stanów w paśmie przewodnictwa,
 $N_v = 2 \left(\frac{2\pi m_h^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ - efektywna gęstość stanów w paśmie walencyjnym.

W przypadku ogólnym przewodność elektryczna jest określona wzorem

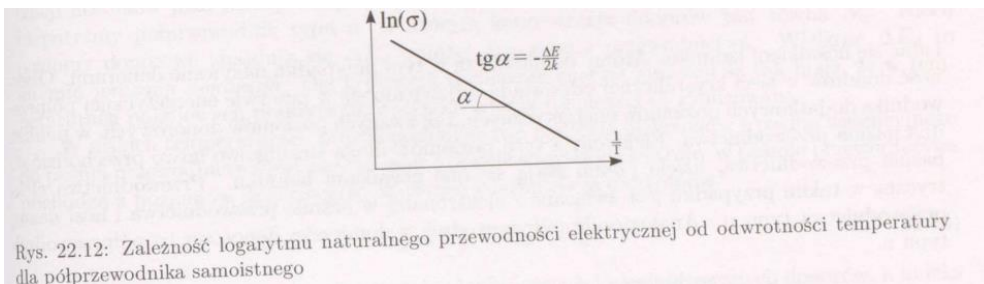
$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p), \quad (22.79)$$

gdzie μ_n, μ_p - ruchliwości elektronów i dziur. Dla półprzewodnika samoistnego $n = p = n_i = p_i$ i zależność temperaturowa przewodności elektrycznej jest dana równaniem

$$\sigma_i = e\sqrt{N_c N_v} (\mu_n + \mu_p) \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right), \quad (22.80)$$

$$E_F = -\frac{\Delta E}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_v}{N_c}\right) = -\frac{\Delta E}{2} + \frac{3kT}{4} \ln\left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right). \quad (22.77)$$

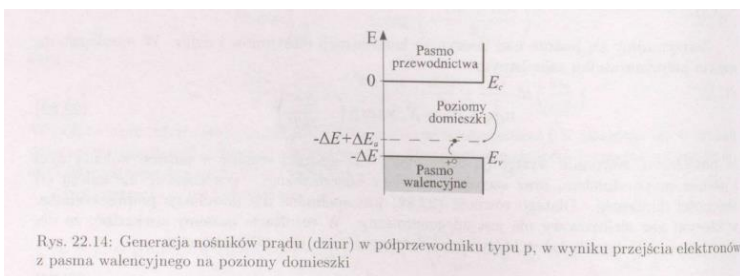
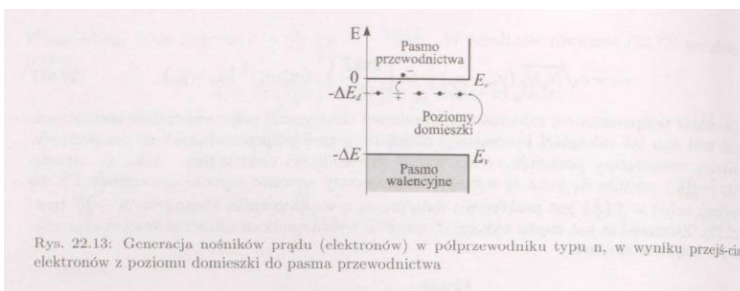
W półprzewodnikach samoistnych poziom Fermiego w temperaturze 0 K znajduje się w środku przerwy energetycznej. Charakter zmian poziomu Fermiego ze wzrostem temperatury zależy od stosunku mas efektywnych dziur i elektronów.



Wzrost temperatury powoduje szybki wzrost przewodności elektrycznej

65. Przewodnictwo elektryczne półprzewodników domieszkowych

Istnienie domieszki w kryształach powoduje, że w przerwie energetycznej pojawiają się poziomy energetyczne. Wtedy przejście elektronów z tych poziomów do pasma przewodnictwa (półprzewodnik typu n) lub z pasma walencyjnego na te poziomy (półprzewodnik typu p) prowadzi do powstania w kryształach nośników ładunku.



Energia jonizacji donorów

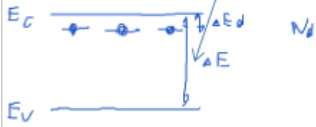
Szerokość przerwy energetycznej

Koncentracja donorów

W niskich temperaturach zacznie się jonizowanie domieszki donorowej, zjonizowane donory to te które oddały elektrony do pasma przewodnictwa.

Przewodnictwo elektryczne p/p-ów domieszkowych

p/p - k typu n



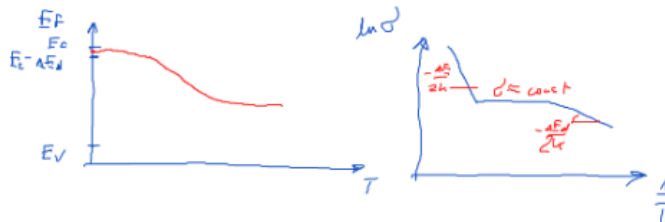
$$n_i p_n = n_i p_i$$

$$E_F = -\frac{\Delta E_d}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_d}{2N_c}\right)$$

Temp. niskie
 $n \approx \sqrt{\frac{N_d N_c}{2}} e^{-\frac{\Delta E_d}{2kT}}$

Temp. średnie
 $n \approx N_d$

Temp. wysokie
 $n = \frac{N_d + \sqrt{N_d^2 + 4n_i^2}}{2}$



Koncentracja nośników

N_c – efektywna gęstość stanów w paśmie przewodnictwa

N_d – koncentracja donorów